Tarea 4 - AS2

Prof. Leonardo I. Martínez Sandoval
Ayud. Claudia Silva Ruiz

Fecha de entrega: 28 de mayo de 2020

Las definiciones y los resultados principales vistos en clase se pueden consultar en las notas del curso disponibles en la página `http://blog.nekomath.com/as2`.

1. A partir de la definición de multiplicación de polinomios en términos de sucesiones, muestra que el polinomio $(0, 1, \overline{0})$ no tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{R}[x]$.

2. Realiza las siguiente operaciones en $\mathbb{R}[x]$ usando la notación de sucesiones. Expresa tu respuesta en notación de sucesiones para polinomios.
   - $(0, 0, 1, 0, 2, \overline{0}) \cdot (1, -1, 3, \overline{0}) - (1, \overline{0}) \cdot (4, 2, -1, \overline{0})$.
   - $(1, 1, 1, 1, 1, 1, \overline{0}) \cdot (-1, 1, \overline{0})$.

3. Determina cuál es el grado del polinomio
$$((x^2 + 1)^8 + 4(5x^5 + 3)^7)^2.$$
   No es necesario que hagas todas las operaciones, pero sí que justifiques con una explicación o mediante algún resultado tu respuesta.

4. Realiza las siguientes operaciones en $\mathbb{R}[x]$ usando la notación de x y sus potencias. Expresa tu respuesta de la forma $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.
   - $(x - 2)^3(x - 3)^2 - (x + 1)^4(x - 1)$.
   - $x(x + 1) + x(2x + 1) + 3x(5x + 2) - 4x(5x + 3)$.

5. Aplica el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de los polinomios $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ y $x^6 - x^5 + 3x - 3$ en $\mathbb{R}[x]$. Exprésalo como combinación lineal polinomial de ambos.

6. Muestra que para el polinomio $p(x) = x^7 - 7x^3 + 8x + 2$ hay un real a en el intervalo $(0, 1)$ tal que $p(a) = \pi$.

7. Usa el método de Cardano para encontrar las raíces del polinomio cúbico
$$q(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 2.$$

8. Usa el método de Ferrari para encontrar las raíces del polinomio cuártico
$$k(x) = x^4 - 10x^2 - 20x - 16.$$

En los problemas del 9 al 12 consideraremos al polinomio

$$A(x) = x^6 - 12x^4 - x^3 + 42x^2 - 12x - 72.$$

Tras resolver estos problemas, podremos determinar cuál es el conjunto de números reales en los cuales $A(x)$ es mayor o igual que cero.

Los métodos de encontrar raíces mediante radicales tienen sus límites. Abel y Ruffini mostraron que hay algunos polinomios cuyas raíces no se pueden encontrar "bonito" como lo permiten los métodos de Cardano y de Ferrari.

De cualquier forma, toda la teoría que hemos desarrollado nos puede ayudar en algunos casos para lidiar con algunos polinomios de grados más grandes. Veremos como se pueden aplicar varias ideas para entender a $A(x)$, que es de grado 6.

Veamos esto paso a paso. Cada ejercicio dependerá de los anteriores.

9. Se sabe que el polinomio $A(x)$ tiene dos raíces racionales distintas a y b con $a < b$. Usa el criterio de las raíces racionales para encontrar quienes son a y b.

10. La raíz a tiene multiplicidad m y la raíz b tiene multiplicidad n. Calculando las derivadas del polinomio $A(x)$, determina los valores de m y n.

11. A partir de lo anterior y del teorema del factor, podemos factorizar a $A(x)$ como

$$A(x) = (x - a)^m (x - b)^n B(x),$$

con $B(x)$ un polinomio en $\mathbb{R}[x]$. Haciendo la división de polinomios, determina quién es $B(x)$ y muestra que es irreducible.

12. Aprovechando esta factorización, determina al conjunto de números reales r tales que $A(r) \geq 0$.