Tarea III

Álgebra Lineal I

1. Espacio dual y ortogonalidad

1. Considera las formas lineales en $\mathbb{R}^3$

$$l_1(x,y,z) = 2x + 4y + z, \qquad l_2(x,y,z) = 4x + 2y + 3z, \qquad l_3(x,y,z) = x + y.$$

   a) Demuestra que l_1, l_2, l_3 forman una base del dual del $\mathbb{R}^3$.

   b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ cuya base dual sea l_1, l_2, l_2.

2. Sean X un conjunto finito y V el espacio de todas las funciones $\psi : X \longrightarrow F$. Para cada $x \in X$, considera la transformación $l_x : V \longrightarrow F$ que manda f a $f(x)$. Demuestra que la familia $(l_x)_{x\in X}$ es una base de V^*.

3. Sean $V = \mathbb{R}[x]$ y W el subespacio de V^* generado por las formas lineales $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $l_n(P) = P^{(n)}(0)$, es decir, la n-ésima derivada de P evaluada en 0. Demuestra que $W^\perp = \{0\}$, pero $W \neq V^*$. Por lo tanto cuando V es de dimensión infinita, si W es un subespacio de V^*, no siempre ocurre que $(W^\perp)^\perp = W$.

4. Sean V un espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios de V. Demuestra que

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

5. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre F-espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestra que

   a) T es inyectiva si y sólo si ${}^tT$ es suprayeciva.

   b) T es suprayectiva si y sólo si ${}^tT$ es inyectiva.

6. Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal entre F-espacios vectoriales de dimensión finita y sea W un subespacio de V. Demuestra que W es estable bajo T si y sólo si $W^\perp$ es estable bajo ${}^tT$.

2. Formas bilineales, cuadráticas y producto interior

7. Sea $V = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas de $[-1,1]$ en $\mathbb{R}$ y considera la transformación $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$b(f,g) = \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(t) g(t) dt + f'(1) g'(1).$$

a) Prueba que b es una forma bilineal simétrica en V.

b) Si q es la forma cuadrática asociada, encuentra las $f \in V$ para las cuales $q(f) = 0$.

8. Sea $V = M_n(\mathbb{R})$ y considera la transformación $q : V \longrightarrow V$ definida por

$$q(A) = Tr(A^T A) + (Tr(A))^2.$$

Prueba que q es una forma cuadrática en V y describe su forma polar.

9. Sea $f = [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua que no toma valores negativos y sea

$$x_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt.$$

Demuestra que para cualesquiera $n, p \geq 0$

$$x_{n+p} \leq \sqrt{x_{2n}} \cdot \sqrt{x_{2p}}.$$

Sugerencia: Define un producto interior sobre el cual puedas usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

10. Considera $V = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales y grado a lo más 3. Definimos

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=1}^{5} p(j)q(j).$$

a) Muestra que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ así definido es un producto interior.

b) Encuentra el ángulo entre los polinomios $1 + x^3$ y $3x - 2x^2$.

c) Para cada entero positivo n, determina la norma del polinomio $1 + nx^3$.

d) Determina la distancia entre los polinomios 1 y $1 + x + x^2 + x^3$.

11. Considera la función $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_3 y_3$$

a) Verifica que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ define un producto interior sobre $\mathbb{R}^3$.

b) Aplica el algoritmo de Gram-Schmidt a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y da una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ equipado con este producto interior.

12. Considera la función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = t^2$ para $t \in [-\pi, \pi]$.

a) Calcula los coeficientes de Fourier de f.

b) Usando el teorema de Plancherel, demuestra la siguiente identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$