Tarea I

Álgebra Lineal I

1. Expresa la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 6 & 1 \\ 9 & 8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ en términos de la base canónica de $M_{3,4}(\mathbb{R})$.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   a) Encuentra todas las matrices $B \in M_2(\mathbb{C})$ que conmutan con A.

   b) Encuentra todas las matrices $B \in M_2(\mathbb{C})$ para las cuales $AB + BA$ es la matriz cero.

3. Para cada $x \in \mathbb{R}$ sea
$$A(x) = \begin{bmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{bmatrix}.$$

   a) Demuestra que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene
$$A(a)A(b) = A(a + b - 2ab).$$

   b) Dado $x \in \mathbb{R}$, calcula $A(x)^n$.

4. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonal cuyas entradas diagonales son distintas dos a dos. Sea $B \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz tal que $AB = BA$. Demuestra que B es una matriz diagonal.

5. Sea $A \in M_2(\mathbb{C})$ una matriz y considera el sistema homogéneo $AX = 0$. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   a) Este sistema solamente tiene la solución trivial.

   b) A es invertible.

6. Demuestra que el sistema homogéneo de ecuaciones $AX = 0$ tiene soluciones no triviales, donde
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$
   Después determina una matriz $B \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ obtenida de A borrando una de sus columnas de tal manera que $BY = 0$ solamente tenga la solución trivial.

7. Sea V el conjunto de todas las soluciones reales del sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 - 3x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 4x_6 &= 0 \end{aligned}$$

   a) Demuestra que $S = \{(0,-1,0,1,1,0),(1,0,1,1,1,0)\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente.

   b) Extiende S a una base para V.

8. Demuestra que E es una matriz elemental si y sólo si E^T lo es.

9. ¿Para cuáles $x \in \mathbb{R}$ es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   invertible? Calcula A^{-1} para cualquiera de esos x.

10. Sea V el conjunto de sucesiones $\{a_n\}$ de números reales. Para $\{a_n\}, \{b_n\} \in V$ y $t \in \mathbb{R}$, define

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \quad \text{y} \quad t\{a_n\} = \{ta_n\}$$

   Demuestra que, con estas operaciones, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

11. (Complejificación de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sea $V_{\mathbb{C}}$ el producto $V \times V$ dotado con la siguiente suma

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y').$$

   También, para cada número complejo $z = a + ib$, considera la "regla de multiplicación por z"

$$z \cdot (x,y) := (ax - by, ay + bx)$$

   en $V_{\mathbb{C}}$. Demuestra que $V_{\mathbb{C}}$ dotado con estas operaciones es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial (este espacio es llamado la **complejificación del espacio vectorial** V).

12. Demuestra que si W es un subespacio de un espacio vectorial V y $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$, entonces $a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n \in W$ para cualesquiera escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

13. Determina si U es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$, donde

   a) U es el conjunto de matrices de 2×2 tal que la suma de las entradas de la primera columna es 0.

   b) U es el conjunto de matrices de 2×2 tal que el producto de las entradas en la primera columna es 0.

14. Demuestra que si S_1 y S_2 son subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $S_1 \subseteq S_2$, entonces $\mathrm{span}(S_1) \subseteq \mathrm{span}(S_2)$. En particular, si $S_1 \subseteq S_2$ y $\mathrm{span}(S_1) = V$, deduce que $\mathrm{span}(S_2) = V$.

15. Sea $V = P_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomos con coeficientes reales cuyo grado no excede 3. Considera los siguientes vectores

$$1 + 3x + x^2, \quad x^3 - 3x + 1, \quad 3x^3 - x^2 - x - 1$$

¿Son linealmente independientes en V?

16. Sean u, v y w vectores distintos de un espacio vectorial V. Muestra que si $\{u, v, w\}$ es una base para V, entonces $\{u + v + w, v + w, w\}$ también es una base para V.

17. Sea V el conjunto de vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tal que $x = z$ y $y = t$.

    a) Demuestra que V es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

    b) Da una base y la dimensión de V.

    c) Completa la base encontrada en b) a una base de $\mathbb{R}^4$.

18. Sea V un espacio vectorial de dimension finita con una base β, y sea $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ una partición de β. Demuestra que $V = \mathrm{span}(\beta_1) \oplus \mathrm{span}(\beta_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{span}(\beta_k)$.

Fecha de entrega: 27 de febrero