Tarea 1 - AS2

Prof. Leonardo I. Martínez Sandoval
Ayud. Claudia Silva Ruiz

Fecha de entrega: 13 de febrero del 2020

Todas las definiciones y los resultados principales vistos en clase se tomaron del libro *Álgebra Superior* de Bravo, Rincón y Rincón (Las Prensas de Ciencias). Aquí los recordamos brevemente.

Un conjunto A es **inductivo** si $\emptyset \in A$ y cada que $x \in A$ se tiene que su **sucesor** $\sigma(x) := x \cup \{x\}$ también está en A. El **quinto axioma de Peano** dice, en estas palabras, que todo subconjunto inductivo de $\mathbb{N}$ tiene que ser $\mathbb{N}$. Gracias al quito axioma, podemos probar una afirmación que depende de un natural n **por inducción**. Para ello hay que probar la afirmación para $n = 0$ y, suponiendo que es cierta para n, probar que es cierta para $n + 1$.

1. Da un ejemplo de un conjunto que sea inductivo y que no sea $\mathbb{N}$.
2. Explica en tus propias palabras cómo el quinto axioma de Peano ayuda a definir objetos por recursión y a probar proposiciones en $\mathbb{N}$ por inducción.
3. Demuestra por inducción que para cualquier natural $n \geq 1$ se tiene que:
   - $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$,
   - $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ y
   - $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

Un conjunto A es **transitivo** si cada vez que $B \in C \in A$, se tiene que $B \in A$. En otras palabras, si $C \in A$, entonces $C \subseteq A$.

4. Demuestra que el menor subconjunto transitivo que contiene a $\{2, 3\}$ es $\{0, 1, 2, 3\}$ y determina el menor conjunto transitivo que contiene a $\{2, \{1, 3\}\}$.

Por definición, un conjunto A es **infinito** si existe una biyección entre A y un subconjunto de A, y que es finito si dicha biyección no existe.

5. Demuestra que el conjunto de los números pares es un conjunto infinito.
6. Demuestra que para todo conjunto finito X existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ que tiene tantos elementos como X.

En la construcción de $\mathbb{N}$, cada uno de ellos es un conjunto. Por definición, para naturales a y b decimos que $a < b$ cuando $a \in b$ y que $a \leq b$ cuando $a \in b$ o $a = b$. Si A es un conjunto no vacío, decimos que m es un **mínimo** de A si para todo $a \in A$ se tiene $a \leq m$. El **principio de buen orden** garantiza que cualquier subconjunto no vacío de naturales tiene un mínimo.

7. Sea A un conjunto no vacío de números naturales. Demuestra que el mínimo de A garantizado por el principio de buen orden es único.

8. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos no vacíos de números naturales. Sean $m_1, m_2, \ldots, m_n$ los mínimos garantizados por el principio del buen orden y $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$.
   - Muestra que el mínimo de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ es igual al mínimo de M.
   - Muestra que si $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ es no vacío, entonces su mínimo es mayor o igual al máximo de M. Da un ejemplo en el que no sea igual.

El **teorema de recursión fuerte** nos permite, dado un $x_0 \in X$ y una familia de funciones $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, construir una función $F : \mathbb{N} \to X$ tal que:

$$F(0) = 0 \quad \text{y} \quad F(n+1) = f_n(F(n)).$$

Para una m fija, usamos el teorema de recursión fuerte para definir la función **"sumar m"** como una función $s_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple

$$s_m(0) = m \quad \text{y} \quad s_m(n+1) = s_m(n) + 1,$$

que para simplificar la notación escribimos como $s_m(n) = m + n$. Así mismo, definimos la función **"multiplicar por m"** como una función $p_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple

$$p_m(0) = 0 \quad \text{y} \quad p_m(n+1) = p_m(n) + m,$$

que escribimos como $p_m(n) = m \cdot n$. Finalmente, definimos la función **"potencias de m"** como una función $e_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple

$$e_m(0) = 1 \quad \text{y} \quad e_m(n+1) = m \cdot e_m(n),$$

la cual escribimos como $e_m(n) = m^n$.

9. Prueba la ley de la cancelación para la suma en $\mathbb{N}$, es decir, que si $a + b = a + c$, entonces $b = c$. Sugerencia: Usa la tricotomía del orden en $\mathbb{N}$.

10. Las etiquetas que usamos para los primeros diez números naturales son $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Explica, paso a paso y usando las definiciones, por qué $2 + 2 = 4$ y por qué $3^2 = 9$. **Nota:** la definición de potencia te hará usar la definición de producto, y esta a su vez la de suma.

11. Demuestra por inducción, usando las definiciones de suma, producto, potencia y orden que para cualesquiera naturales $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que:
    - $m + n = n + m$ y $m \cdot n = n \cdot m$
    - $l + (m + n) = (l + m) + n$ y $l \cdot (m \cdot n) = (l \cdot m) \cdot n$
    - $l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$
    - $(mn)^l = m^l \cdot n^l$
    - Si $k < l$ y $m < n$, entonces $k + m < l + n$ y $k \cdot m < l \cdot n$.