VIII Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2018
Segunda Etapa

Sábado 9 de junio 2018

Problema 1. Considera tres reales positivos tales que $a+b+c=4$ y $abc=1$. Muestra que

$$a^2+8a \geq (b-c)^2.$$

Problema 2. Encuentra todas las matrices $A \in \mathcal{M}_{2018\times 2018}(\mathbb{C})$ tales que

$$A^2+2017I=2018A.$$

Nota. I denota la matriz identidad.
Problema 3. Muestra que la siguiente serie converge y encuentra el valor de ella:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}\right).$$

Problema 4. Demuestre que existe un real positivo $C>1$ con la siguiente propiedad: Para cualesquiera (n,s,t) enteros positivos con s,t primos relativos, $s>(n-1)t$, y $t>1$ se cumple que:

$$\text{mcm}[s,(s-t),(s-2t),...,(s-(n-1)t)] > C^n.$$

Problema 5. Se eligen 2018 puntos al azar con probabilidad uniforme sobre un disco. Determine la probabilidad de que el centro del disco quede dentro de la envolvente convexa de esos 2018 puntos.
Problema 6. Sea F un grupo libre generado por n letras con $n\geq 2$. Muestra que para cualquier morfismo no cero

$$\varphi : F \to \mathbb{Z},$$

se cumple que

$$\{g \in F : \varphi(g)=0\}$$

no es finitamente generado.

Soluciontes

Problema 1. Notemos las siguientes equivalencias

$$
\begin{aligned}
a^2-(b-c)^2+8a\geq 0 &\Leftrightarrow (a+b-c)(a+c-b)+8a\geq 0\\
&\Leftrightarrow (4-2c)(4-2b)+8a\geq 0\\
&\Leftrightarrow (2-c)(2-b)+2a\geq 0\\
&\Leftrightarrow 4-2(b+c)+bc+2a\geq 0\\
&\Leftrightarrow 4-2(a+b+c)+bc+4a\geq 0\\
&\Leftrightarrow bc+4a\geq 4
\end{aligned}
$$

Pero la última equivalencia es cierta pues por MA-MG se cumple lo siguiente:

$$\frac{bc+4a}{2}\geq\sqrt{4abc}=2$$

□

Problema 2. Notemos que la condición del problema quiere decir que el polinomio $p(x)=x^2-2018x+2017$ anula a A, por lo tanto si $q(x)$ es el polinomio mínimo de A, $q(x)\mid p(x)=(x-2017)(x-1)$, luego

$$q(x)=\begin{cases}(x-1)\\(x-2017)\\(x-2017)(x-1)\end{cases}$$

en cualquier caso la matriz A es diagonalizable, pues el polinomio mínimo no tiene raíces múltiples. Luego la matriz diagonal es de la forma

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_{2018}\end{bmatrix}\tag{1}$$

donde $\lambda_i\in\{1,2018\}$ (pues son los posibles valores propios de la matriz por ser las raíces de $q(x)$). Por último cualquier matriz similar a (1) cumple, entonces la respuesta es todas las matrices similares a una matriz como (1).

□

Problema 3. Notemos que se cumple la siguiente identidad

$$\arcsin(x)-\arcsin(y)=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$$

entonces si aplicamos esto para $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$ y $y=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)&=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\\
&=\arcsin\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n\,(n+1)}}\right)
\end{aligned}
$$

Lo anterior implica que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{\sqrt{m} - \sqrt{m+1}}{\sqrt{m\left(m+1\right)}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
&= \arcsin\left(1\right) - \arcsin\left(0\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

Problema 4. Demostremos primero el siguiente lema.
Lema:

$$\left[s, s-t, ..., s-\left(n-1\right)t\right] \geq \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(s-\left(k-1\right)t\right)}{n!}$$

Prueba. Sea $f\left(p\right) = \text{máx}\{v_p\left(s\right), v_p\left(s-t\right), v_p\left(s-2t\right), ..., v_p\left(s-\left(n-1\right)t\right)\}$. Entonces, vamos a tener que:

$$\left[s, s-t, ..., s-\left(n-1\right)t\right] = \prod_{p\ primo} p^{f(p)}$$

Por lo tanto, basta demostrar que:

$$v_p\left(\prod_{k=1}^{n} s-\left(k-1\right)t\right) - f\left(p\right) \leq v_p\left(n!\right)$$

Sea i tal que $s-it$ es de donde se saca el $f\left(p\right)$. Entonces, vamos a tener que:

$$v_p\left(\prod_{k=1}^{n-i-1} s-\left(i+k\right)t\right) = v_p\left(\left(n-i-1\right)!\right)$$

$$v_p\left(\prod_{k=0}^{i-1} s-kt\right) = v_p\left(i!\right)$$

Y tenemos que $v_p\left(\left(n-i-1\right)!\right) + v_p\left(i!\right) \leq v_p\left(n!\right)$ porque $\binom{n}{i}$ es entero. Con ello queda demostrado el lema.

Regresando al problema vamos a tener que:

$$s-\left(n-1\right)t \geq 1, s-\left(n-2\right)t \geq 3, ..., s \geq 2n-1$$

Esto nos dice que:

$$\text{mcm}[s, \left(s-t\right), ..., \left(s-\left(n-1\right)t\right)] \geq \frac{\left(2n-1\right)!!}{n!} > \frac{2^{n-1}}{n}$$

De aquí se sigue claramente el problema.

□

Problema 5. Damos dos soluciones para el problema

Solución 1. Llamemos θ al centro del disco. Veamos que dados los n puntos en el disco el centro está en el casco convexo de ellos si y sólo si está en el casco convexo de los n puntos que resultan de proyectar desde θ los n puntos originales a la circunferencia que encierra el disco. Por lo anterior, trabajemos solo el caso de los puntos sobre la circunferencia.

El caso $n = 3$ se puede calcular fácilmente de la siguiente manera: dados tres puntos x_1, x_2 y x_3, pensemos en el diámetro D_1 que pasa por x_1 y el diámetro D_2 que pasa por x_2. Para que θ esté en el casco convexo de los tres puntos, necesitamos que x_3 esté en el semidisco determinado por D_1 que no contiene a x_2 (lo cual tiene probabilidad $1/2$) y además necesitamos que x_3 esté en el semidisco determinado por D_2 que no contiene a x_1 (lo cual también tiene probabilidad $1/2$). Así la probabilidad buscada es:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Puesto que un punto está en el casco convex de n puntos si y sólo si esta dentro de un triángulo, podemos calcular la probabiliadad de que un punto no este dentro del casco convexo como la probabilidad de que no esté dentro de ningun triángulo de una triangulación.

La triángulación que consideramos es la definida por unir un punto x_1 con todos los demás puntos, de esta forma se tienen $n-2$ triángulos. Luego como los eventos de que θ no esté dentro de dos triángulos distintos son independientes, la probabilidad de que θ no esté en el casco convexo es

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{n-2},$$

por lo tanto la probabiliadad buscada es $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

□

Solución 2. Llamemos θ al centro del disco. Dados n puntos, sea P_n la probabilidad de que al tomar n puntos, θ esté el casco convexo de los n puntos.

Evidentemente $P_2 = 0$. Por otro lado, $P_3 = 1/4$ y se puede calcular fácilmente de la siguiente manera: dados tres puntos x_1, x_2 y x_3, pensemos en el diámetro D_1 que pasa por x_1 y el diámetro D_2 que pasa por x_2. Para que θ esté en el casco convexo de los tres puntos, necesitamos que x_3 esté en el semidisco determinado por D_1 que no contiene a x_2 (lo cual tiene probabilidad $1/2$) y además necesitamos que x_3 esté en el semidisco determinado por D_2 que no contiene a x_1 (lo cual también tiene probabilidad $1/2$). Así:

$$P_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

De esta manera, dados $n+1$ puntos en el disco, digamos $x_1, \ldots, x_{n+1}$, la probabilidad P_{n+1} la podemos calcular de la siguiente manera. Por un lado, la probabilidad de que θ esté en el casco convexo de los puntos $x_1, \ldots, x_n$ es P_n. Si θ no está en dicho casco convexo, entonces los puntos $x_1, \ldots, x_n$ se encuentran todos en un sector circular determinado por dos de dichos puntos. Sean x_{i_1} y x_{i_2} los puntos que determinan dicho sector (es decir, aquellos puntos para los cuales el ángulo $\angle x_i \theta x_j$ es máximo). Entonces, dados D_1 y D_2 los diámetros determinados por x_{i_1} y x_{i_2}, respectivamente, para que θ esté en el casco convexo de $x_1, \ldots, x_{n+1}$ (que es lo mismo a que θ esté en el casco convexo de x_{i_1}, x_{i_2} y x_{n+1}) necesitamos que x_{n+1} esté en el semidisco determinado por D_1 que no contiene a x_{i_2} y también necesitamos que esté en el semidisco determinado por D_2 que no contiene a x_{i_1}. Ambas situaciones tienen probabilidad $1/2$ y por lo tanto,

$$P_{n+1} = P_n + (1 - P_n) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} P_n + \frac{1}{4}.$$

De esta manera, podemos observar que las probabilidades P_n están dadas por las sumas geométricas:

$$P_3 = \frac{1}{4}$$

$$P_4 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$P_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$

En particular $P_{2018} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2016}$

$\square$

Problema 6. Consideremos $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base de F. Si

$$m.c.d.(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) = d,$$

consideremos $\overline{\varphi} = \varphi/d$. Como la imagen de la base es un conjunto de enteros primos relativos, existe una combinación lineal entera de estos enteros que da 1. En F se cumple que cualquier palabra x que tenga como suma de exponentes, en cada generador, el coefieciente respectivo al de la combinación lineal cumplira que $\overline{\phi}(x) = 1$, definamos $x_1 = a_1$ y $x_2 = xa_1$, como la imagen de x_1, x_2 son primos relativos existe una combinación lineal de ellos que da 1, luego podemos contruir y_1 y y_2 palabras en F que involucran solo a x_1 y x_2 tales que $\overline{\varphi}(y_1) = 1$ y $\overline{\varphi}(y_2) = 0$. Despúes es posible extender de forma inductivoa y_1, y_2 a una base de F tal que $\overline{\varphi}(y_i) = 0$ para cada $i \geq 2$. Con esto es posible obtener una factorización de $\overline{\varphi}$ como

$$F \to F_2 \to \mathbb{Z}$$

donde $f : F \to F_2 =< a, b >$ satisface $f(y_1) = a$ y $f(y_i) = b$ para cada $i \geq 2$; $g : F_2 \to \mathbb{Z}$ satisface $g(a) = 1$ y $g(b) = 0$. Ahora si se muestra que el kernel de g no es finitmanete generado, entonces el kernel de $\overline{\varphi}$ tampoco lo és.

Para ver esto notemos que la familia

$$\{ab^n a^{-1} | n \in \mathbb{Z}\}$$

genera al kernel de g y no hay conjunto finito de palabras que genere a este conjunto.

$\square$