VII Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2017
Segunda Etapa

Sábado 17 de junio de 2017

Problema 1. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales que cumple:

- $a_1 = 1$
- a_i, a_{i+1}, a_{i+2} están en progresión geométrica o en progresión aritmética si i es impar o par, respectivamente.

Encuentra los valores de a_2 para los cuales $a_{2017} = 1009^2$.

Problema 2. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita con producto interior. Demuestra que si existe un automorfismo antisimétrico (es decir, $A : V \to V$ lineal, biyectivo y para el cual $\langle A(x), y\rangle = -\langle x, A(y)\rangle$ para todo $x, y \in V$), entonces la dimensión de V es par.

Problema 3. Sea $f : [0,1] \to (0,\infty)$ una función creciente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considera $P_n = \{0 = t_{n0} < t_{n1} < ... < t_{nn} = 1\}$ la partición de $[0,1]$ para la cual

$$\int_{t_{ni-1}}^{t_{ni}} f = \frac{1}{n}\int_0^1 f.$$

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, encuentra el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{ni}}{t_{n1}}.$$

Problema 4. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es 2017-*amigable* si es posible encontrar un entero n tal que cada uno de los números del 1 al 2017 aparezcan en $f(n)$ como *subnúmeros*, es decir, como números formados por una subcadena de dígitos consecutivos que no empiece en cero. Por ejemplo, los subnúmeros de 1103 son $1, 3, 10, 11, 103, 110, 1103$.

- Muestra que $f(n) = 2017n$ es 2017-amigable.
- Muestra que $f(n) = (2017n)^{2017}$ es 2017-amigable.

Problema 5. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente ecuación

$$f(x-1)f(y) = f(y-1)f(x) + 2(xy-1)(x-y)$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 6. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in [0,1]$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Muestra que para cada $\epsilon > 0$ existe una familia $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ de rectángulos con lados de medidas $a_i \leq b_i$ de manera que cubren a la gráfica de f y

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \epsilon.$$

Nota. Los rectángulos no necesariamente tienen lados paralelos a los ejes.

Solucientes

Problema 1. Supongamos que $a_2 = a$.
a_1 , a_2 , a_3 en progresión geométrica $\implies a_3 = a^2$.
a_2 , a_3 , a_4 en progresión aritmética $\implies a_4 = 2a_3 - a_2 = a(2a-1)$.
a_3 , a_4 , a_5 en progresión geométrica $\implies a_5 = \frac{a_4^2}{a_3} = (2a-1)^2$.
Por inducción se puede comprobar que:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \big(na - (n-1)\big)\big((n-1)a - (n-2)\big) \\ a_{2n+1} &= \big(na - (n-1)\big)^2 \end{aligned}$$

Por lo que: $a_{2017} = (1008 \cdot a - 1007)^2 = 1009^2$ que tiene por soluciones $a = 2$ y $a = -\frac{1}{504}$.
Problema 2. Damos dos soluciones al problema

Solucion 1. Observe que A no tiene valores propios reales, pues si λ es un valor propio real asociado a x, tendríamos:

$$\begin{aligned} \lambda\langle x, x\rangle &= \langle \lambda x, x\rangle \\ &= \langle A(x), x\rangle \\ &= -\langle x, A(x)\rangle \\ &= -\lambda\langle x, x\rangle \end{aligned}$$

De donde se concluye $\lambda = 0$, en contradicción con la inyectividad de A. Por tanto el polinomio característico de A tiene únicamente raices complejas, entonces el polinomio característico debe ser de grado par, y por tanto la dimensión de V también.

Solucion 2. Usando el proceso de ortonormalización de Gram Schmidt construimos una base ortonormal $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ de V, como para $1 \leq i, j \leq n$ se cumple que $\langle A(V_i), V_j\rangle = -\langle V_i, A(V_j)\rangle$, concluimos que $[A]$; la representación matricial de A respecto a $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$, es antisimétrica.

Por tanto

$$det([A]) = det([A]^T) = det([-A]) = -1^n det([A]), \qquad (*)$$

donde ^{T} indica trasponer y n es la dimensión de V. Como A es biyectiva se cumple que $det([A]) \neq 0$, esto junto con la ecuación $(*)$, implica que n es par.

Problema 3. *Afirmación*: Podemos suponer sin perder la generalidad que f es continua en 0. En efecto si f no fuera continua, podemos considerar la función

$$g : [0,1] \to (0,\infty) \text{ dada por}$$
$$g(x) = \begin{cases} L & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde $L = inf\{f(t) \in (0,\infty) \mid 0 < t \leq 1\} \geq f(0) > 0$.
La función g así definida es continua en 0 y satisface:

$$\int_0^1 f = \int_0^1 g \quad \text{y} \quad \int_{t_{ni-1}}^{t_{ni}} f = \int_{t_{ni-1}}^{t_{ni}} g \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall i \leq n.$$

Por el teorema del valor intermedio para integrales, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \leq n$, $\exists$ M_{ni} tal que:

1. $0 < f(0) \leq f(t_{ni-1}) \leq M_{ni} \leq f(t_{ni}) \leq f(1)$
2. $\frac{A}{n} = \int_{t_{ni-1}}^{t_{ni}} f = M_{ni}\Delta_{ni}$, donde $A = \int_0^1 f$ y $\Delta_{ni} = t_{ni} - t_{ni-1}$.

Como $f(0) > 0$, tenemos que

$$0 \leq \Delta_{ni} = \frac{A}{nM_{ni}} \leq \frac{A}{nf(0)}$$

entonces

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \Delta_{ni} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{A}{nf(0)} = 0.$$

De esta manera si fijamos una $i \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} t_{ni} = \lim_{n\to\infty} \Delta_{n1} + \cdots + \Delta_{ni} = 0.$$

Usando que f es continua en 0 y que $\lim_{n\to\infty} t_{ni} = 0$, concluimos que

$$f(0) \leq \lim_{n\to\infty} M_{ni} \leq \lim_{n\to\infty} f(t_{ni}) = \lim_{t\to 0} f(t) = f(0).$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} M_{ni} = f(0) > 0.$$

Así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{ni}}{M_{nj}} = 1. \qquad \forall i, j \text{ fijos.}$$

Como $\Delta_{ni} = \frac{A}{nM_{ni}}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{ni}}{\Delta_{nj}} = \lim_{n\to\infty} \frac{M_{nj}}{M_{ni}} = 1,$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{ni}}{t_{n1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{n1} + \Delta_{n2} + \cdots + \Delta_{ni}}{\Delta_{n1}} = i$$

Problema 4. Sea L el número obtenido de concatenar los números del 1 al 2017, es decir, $L = 123\ldots20162017$. En L aparecen cada uno de los números del 1 al 2017. En ambos incisos veremos que hay un número que comienza con L, lo cual es suficiente para deducir que la función es 2017-amigable.

- Consideremos N como el número obtenido de concatenar L y cuatro ceros. Los números N, $N+1, \ldots, N+2016$ comienzan con L. Como son 2017 números consecutivos, alguno de ellos es múltiplo de 2017, digamos $N + j = 2017k$. Esto muestra que $f(n) = 2017n$ es 2017-amigable.
- Sea r un entero positivo para el cual

  $$\left(\sqrt[2017]{L+1} - \sqrt[2017]{L}\right) \cdot 10^{r/2017} > 2018.$$

  Esto garantiza que en el intervalo abierto $\left(\sqrt[2017]{10^r L},\ \sqrt[2017]{10^r(L+1)}\right)$ existe un entero positivo múltiplo de 2017, digamos 2017ℓ. De este modo,

  $$10^r L < (2017\ell)^{2017} < 10^r(L+1).$$

  Esto garantiza que el número $(2017\ell)^{2017}$ comienza con L y que por lo tanto $f(n) = (2017n)^{2017}$ es 2017-amigable.

Problema 5. Tomando $x = 1, y = 0$ se obtiene que

$$f(-1)f(1) - f(0)^2 = 2. \tag{1}$$

De donde $f(-1)f(1) \geq 2$, en particular $f(-1) \neq 0 \neq f(1)$. Fijando $y = 0$ y dejando a x variar, obtenemos $f(0)f(x-1) - f(-1)f(x) = -2x$. Fijando $y = 1$ y dejando a x variar obtenemos $f(1)f(x-1) - f(0)f(x) = 2x^2 - 4x + 2$. Entonces tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f(0)f(x-1) - f(-1)f(x) = -2x \\ f(1)f(x-1) - f(0)f(x) = 2x^2 - 4x + 2. \end{cases} \tag{2}$$

De la ecuación 1 sabemos que $f(-1)f(1) - f(0)^2 \neq 0$, por lo que para cada x, el determinante del sistema de ecuaciones anterior es distinto de cero y por lo tanto el sistema tiene solución única cuando se piensa a $f(x)$ y $f(x-1)$ como incógnitas. Más aun, $f(x)$ será una combinación lineal de $-2x$ y $2x^2 - 4x + 2$, cuyos coeficientes solo dependen de los valores $f(-1), f(0)$ y $f(1)$, por lo tanto, $f(x)$ es un polinomio de grado a lo más dos.

De la ecuación original es claro que $f(x)$ no puede ser un polinomio constante y por lo tanto tiene al menos una raíz. Sea α una raíz, α no puede ser 0 ya que si lo fuera, sustituyendo $x = 0$ en la ecuación inicial obtendriamos $f(-1)f(y) = 2y$, es decir f sería una función lineal, digamos $f(x) = cx$ y sustituyendo esto en la ecuación inicial para $x = 1$ y $y = 0$ tendríamos que $0 = -c^2 - 2$ lo que es absurdo, por lo que ciertamente $\alpha \neq 0$.

Sustituyendo $x = \alpha$, $y = \frac{1}{\alpha}$ en la ecuación original, obtenemos que $f(\alpha - 1)f(\frac{1}{\alpha}) = 0$, por lo tanto alguno de los valores $\alpha - 1$ o $\frac{1}{\alpha}$ es también una raíz del polinomio. Además, como ya vimos que ni -1 ni 1 son raíces, entonces $\alpha \neq \frac{1}{\alpha}$ y claramente $\alpha \neq \alpha - 1$, por lo tanto f tiene dos raíces distintas. Como f es un polinomio de grado a lo más 2 y ya vimos que tiene al menos dos raíces, entonces es de grado dos. De donde

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Sustituyendo en la ecuación original $x = \alpha_1, y = \alpha_2$ llegamos a que $(\alpha_1\alpha_2 - 1)(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$. Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2 - 1 = 0$ y por lo tanto $\alpha_1\alpha_2 = 1$. Utilizando lo apenas obtenido, al sustituir $x = -\alpha_1, y = -\alpha_2$ en la ecuación original encontramos que

$$f(-\alpha_1 - 1)f(-\alpha_2) = f(-\alpha_2 - 1)f(-\alpha_1),$$

usando que $f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ obtenemos

$$\begin{aligned}(-2\alpha_1 - 1)(-\alpha_1 - \alpha_2 - 1)(-\alpha_2 - \alpha_1)(-2\alpha_2)\\ = (-\alpha_1 - \alpha_2 - 1)(-2\alpha_2 - 1)(-2\alpha_1)(-\alpha_1 - \alpha_2),\end{aligned}$$

como $\alpha_1\alpha_2 = 1$, se tiene que $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, por lo que la ecuación anterior se escribe como:

$$(-2\alpha_1 - 1)(-\alpha_1 - \alpha_2 - 1)(-2\alpha_2) = (-\alpha_1 - \alpha_2 - 1)(-2\alpha_2 - 1)(-2\alpha_1),$$

utilizando nuevamente que $\alpha_1\alpha_2 = 1$:

$$(4 + 2\alpha_2)(-\alpha_1 - \alpha_2 - 1) = (-\alpha_1 - \alpha_2 - 1)(4 + 2\alpha_1),$$

o equivalentemente

$$(-\alpha_1 - \alpha_2 - 1)(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$$

y como $\alpha_1 \neq \alpha_2$ se concluye que $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$.

De las fórmulas de Vieta, dado que ya sabemos el producto y la suma de las raíces de $f(x)$ obtenemos $f(x) = a(x^2 + x + 1)$. Sustituyendo esto en la ecuación original se deduce que $a = 1$, por lo que la única función que satisface la ecuación es

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

Problema 6. Podemos suponer que $f(0) = 0$, dado que las hipótesis y la conclusión se mantienen al restar una constante adecuada. En este caso además se tiene que $|f(x)| \leq 1$. Para cada $x, y \in [0, 1]$ denotemos por $\alpha_{(x,y)}$ la función lineal que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$. Veamos el siguiente lema.

Lema. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $[x, y] \subset [0, 1]$ ocurre alguna de las siguientes dos afirmaciones:

1. $\forall z \in [x, y]$ se cumple que
$$\left|f(z) - \alpha_{(x,y)}(z)\right| < \varepsilon|y - x|$$

2. $\exists[x'y'] \subset [x, y]$ con $|y' - x'| \geq \delta|y - x|$ y tal que
$$\left|\frac{f(y') - f(x')}{y' - x'}\right| > \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| + \varepsilon.$$

Prueba. Supongamos que no ocurre (a). Demostraremos el caso en que $f(x) < f(y)$, y $f(z) - \alpha_{(x,y)} \geq \varepsilon|y - x|$, los demás casos son análogos. Bajo esta suposición se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right| = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{\alpha_{(x,y)}(z) + \varepsilon(y - x) - f(x)}{z - x} &= \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \varepsilon\frac{y - x}{z - x} \\ &> \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \varepsilon,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de la regla de correpondencia de $\alpha_{(x,y)}$. Finalmente usando que las pendientes de las funciones $\alpha_{(x,y)}$ son menores que 1 se puede mostrar que $|z - x| > \varepsilon\frac{|x-y|}{2}$ lo cual asegura que podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, y queda probado el lema.

Para demostrar lo requerido en el problema, apliquemos el lema de la siguiente manera: sea $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\varepsilon > 1$, entonces aplicando el lema n veces a cualquier intervalo $[x, y]$, obtenemos en algún momento un subintervalo $[x', y']$ de longitud almenos $\delta^n|y - x|$ tal que la pendiente de la recta entre $(x', f(x'))$ y $(y', f(y'))$ es al menos $n\varepsilon > 1$ o $\forall z \in [x', y']$ se tiene que $|\alpha_{(x',y')}(z) - f(z)| < \varepsilon|x' - y'|$, como la primera es absurda pues las pendientes están acotadas por uno, debe ocurrir la segunda. Empezando con este proceso para todo el intervalo obtenemos $[x_1, y_1]$; un intervalo de longitud al menos k donde la gráfica se queda metida en la bara de radio ε al rededor de la función lineal, repitiendo esto para $[0, x_1]$ y $[y_1, 1]$ obtenemos un nuevo par de intervalos $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$ de tamaño al menos kx_1 y $k|1 - y_1|$, repitiendo este proceso podemos obtener una cantidad numerable de intervalos, de forma que lo que falta cubrir del intervalo tiene medida de Lebesgue menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ (pues siempre vamos quitando medida positiva acotada inferiormente por una constante), en este punto tomamos los rectángulos que cubren cada imagen de la función en estos intervalos y en los demás puntos usamos una familia numerable de rectángulos de la forma $[a_i, b_i] \times [-1, 1]$. Entonces la construcción es tal