VII Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2017
Primera Etapa

Problema 1. Considera la figura del Ying Yang, la cual está formada por un círculo grande de radio 1, y dos círculos tangentes de diámetro 1. La diagonal AB del cuadrado divide a la región negra en dos regiones. ¿Cuál es el área de la región negra inferior?

(a) $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{5}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

Problema 2. ¿Cuál es el mínimo n para el cual cualquier matriz A de $m \times m$ con entradas reales puede escribirse como suma de n matrices distintas de rango 1?

(a) m (b) $m+1$ (c) $m-1$ (d) hay matrices para las cuales no ocurre esto

Problema 3. Para cada $i \geq 2$ entero positivo se denota por p_i al mayor número de Fibonacci p tal que $p \leq i$ y por q_i al menor numero de Fibonacci q tal que $i < q$. ¿Cuál es el valor de la serie $\sum\limits_{i \geq 2} \frac{1}{p_i q_i}$?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{6}{\pi^2}$ (d) 1

Problema 4. Sean C_1 y C_2 las gráficas de dos polinomios cúbicos en una variable. Llamemos C_2' a la curva que se obtiene al girar C_2 un ángulo de 90° en sentido horario. ¿Cuál es el máximo número de puntos en los que se pueden intersectar C_1 y C_2'?

(a) 1 (b) 3 (c) 6 (d) 9

Problema 5. Un reloj está descompuesto de modo que si la manecilla de los minutos marca x minutos, entonces la manecilla gira a $x+1$ vueltas por minuto. Sabiendo que la manecilla inicia marcando 0, ¿en cuál de los siguientes intervalos está el número de minutos que tarda en dar una vuelta la manecilla?

(a) [30,60] (b) [10,15] (c) [4,8] (d) [1,3]

Problema 6. Para un número natural n, se denota por $\varphi(n)$ la cantidad de numeros primos relativos con n en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. ¿Cuántas parejas de enteros positivos (m, n) cumplen que

$$\varphi(mn) = \varphi(m) + \varphi(n)?$$

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) una infinidad

Problema 7. ¿Cuantos valores enteros x en el intervalo $[1, 100]$ hacen que el determinante de la siguiente matriz sea múltiplo de 3?

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & x+2 \end{pmatrix}$$

(a) 0 (b) 34 (c) 67 (d) 100

Problema 8. ¿Cuál de los siguientes números complejos está más alejado del cero?

(a) $(1+i)^5$ (b) $(1+2i)^4$ (c) $(1+3i)^3$ (d) $(1+4i)^2$

Problema 9. Sean $f(x)=x^3$ y $g(x)=\int_0^x \frac{1}{t+1}dt$. La función $h_{a,b}$ se define como $h_{a,b}(x)=af(x)$ si $x<0$ y $h_{a,b}(x)=bg(x)$ si $x\geq 0$. ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid h_{a,b}$ es función continua$\}$?

(a) 0 (b) 1 (c) $|\mathbb{N}|$ (d) $|\mathbb{R}|$

Problema 10. Para cada par de números enteros m,n denotemos por (m,n) al máximo común divisor de m y n. Si $n\geq 2$, ¿cuál es el valor de $\sum_{j=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{1}{(n,j)}\right\rfloor$?

(a) 1 (b) $\varphi(n)$ (c) n (d) $\frac{n}{\varphi(n)}$

Problema 11. Sean $P_1,P_2,\ldots,P_{12}$ los vértices de un 12-ágono regular de lado 1. En cada rayo P_iP_{i+1} se marca un punto Q_i con $P_iQ_i=3$. ¿Cuál es la máxima cantidad de segmentos P_iQ_i que se pueden intersectar con una misma línea recta?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Problema 12. ¿En cuántas regiones queda dividido el espacio cuando se dibujan 4 planos que pasan por un mismo punto, pero no hay tres de estos planos que contengan una misma línea recta?

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16

Problema 13. Sea $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices de 4×4 con entradas reales. Llamemos $\mathcal{V}$ al subespacio generado por el conjunto

$$\{AB-BA \mid A,B\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})\}$$

¿Cúál es la dimensión de $\mathcal{V}$?

(a) 16 (b) 15 (c) 12 (d) 1

Problema 14. Se toma un número α aleatoria y uniformemente en el intervalo $[0,60]$. ¿Cuál es la probabilidad de que la integral de $\int_0^\pi \sin\left(x+\frac{\pi\alpha}{60}\right)dx$ sea mayor que $\sqrt{3}$?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{\pi}$ (d) $\frac{5}{6}$

Problema 15. En una fiesta se sabe que cada quien tiene tres amigos, pero que no hay tres personas que sean amigos dos a dos. ¿Cuál es la mínima cantidad de personas posibles en la fiesta?

(a) 4 (b) 6 (c) 7 (d) 8

Problema 16. Sea $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ una función tal que $f(1)=2$ y $f(xy)=f(x)-\frac{f(-y)}{x}$. ¿Cuál es el valor de $f(1/2)$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 17. ¿Cuál es el valor del siguiente límite?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2}}$$

(a) 1 (b) $3\sqrt{2}-1$ (c) $\sqrt{\log 2}$ (d) $2(\sqrt{2}-1)$

Problema 18. Considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$

$$S = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m \text{ y } n \text{ son enteros no negativos}\}.$$

¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

(a) La cerradura de S es un conjunto abierto
(b) El complemento de S tiene interior no vacío
(c) S tiene interior no vacío
(d) Todos los enunciados anteriores son falsos

Problema 19. ¿Cuántos vectores en $(\mathbb{Z}_3)^7$ hay que tengan una cantidad par de ceros?

(a) 1094 (b) 1108 (c) 739 (d) $\binom{7}{3}$

Problema 20. El grupo cíclico $\mathbb{Z}_{120}$ tiene un único subgrupo G con dos elementos y un único subgrupo H de índice 2. ¿Cuántos subgrupos de $\mathbb{Z}_{120}$ contienen a G y están contenidos en H?

(a) 6 (b) 8 (c) 16 (d) 20

Problema 21. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar que tengan vértices en los puntos del siguiente dibujo?

(a) 18 (b) 34 (c) 44 (d) 46

Problema 23. Se quiere dividir un triángulo obtuso en triángulos acutángulos. ¿Cuál es el mínimo número necesario de triángulos acutángulos para poder hacer esa división?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) ∞

Problema 24. Se quieren colorear cada uno de los números del 1 al 10 con los colores, rojo, azul o verde de manera que si a, b cumplen que $a-b$ es impar, entonces a y b tienen colores distintos. ¿De cuántas maneras se puede hacer la coloración?

(a) 10 (b) 96 (c) 186 (d) No existe una coloración así

Problema 25. En la siguiente figura el triángulo ABC es equilátero de lado 1, los arcos pertenecen a circunferencias de radio 1, la circunferencia pequeña es tangente a los tres arcos. ¿Cuál es el valor del área sombreada?

(a) $\frac{\pi-\sqrt{3}}{16}$ (b) $\frac{\sqrt{3}(4-\pi)}{17}$ (c) $\frac{1}{6}\pi + \frac{(4\sqrt{3}-13)}{18}$ (d) $\sqrt{3}(\frac{4}{3}\pi+1) - \frac{17}{6}\pi$

Problema 25. Évariste Galois, Pescheux d'Herbinville y Ernest Duchâtelet pelearán un duelo a muerte con las siguientes reglas. Primero decidirán al azar quién dispara primero, quién segundo y quién tercero. Luego tomarán sus lugares en las esquinas de un triángulo equilátero y por turnos, siguiendo el orden previamente fijado, cada uno o bien elegirá no diparar o bien elegirá un contrincante para dispararle. Este proceso sigue hasta que sólo haya un sobreviviente. Es por todos conocido que Galois siempre atina a su blanco, mientras que d'Herbinville lo hace el 80 % de las veces y Duchâtelet únicamente el 50 %. Durante el duelo, cada uno seguirá la mejor estrategia para sí mismo. ¿Qué probabilidad tiene Galois de sobrevivir el duelo?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{3}{4}$