Profundidad familiar con respecto a caras de figuras regulares

Alexis Aburto, Sofía Armenta, Leonardo Martínez, José Luis Miranda, Yadira Sántiz

Taller de Matemáticas Discretas

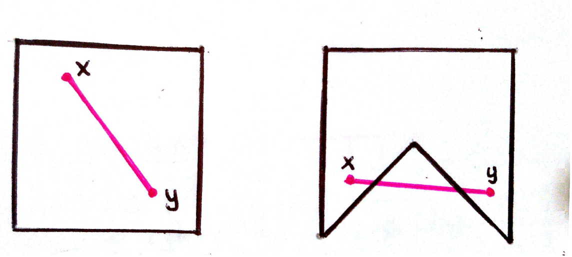
16 de junio de 2017

Conjuntos convexos

Definición de convexo

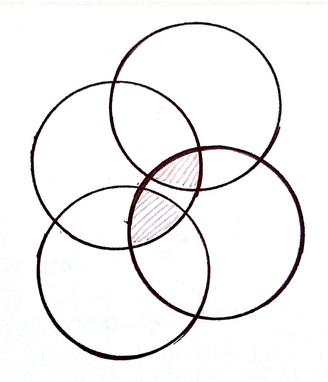
Definición

Sea X un conjunto en $\mathbb{R}^d$. Decimos que X es convexo si para cualesquiera puntos x, y en X todo el segmento xy se queda contenido en X.

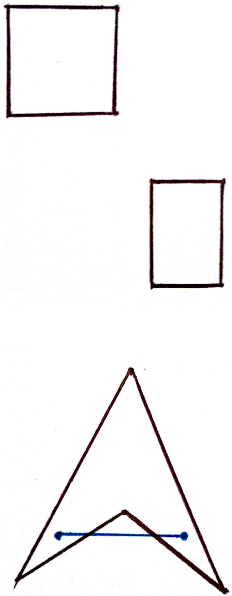


Algunas propiedades de convexos

- La intersección de una familia de conjuntos convexos es un conjunto convexo.
- Convexo implica conexo, pero el recíproco no es cierto.
- La unión de convexos no necesariamente es convexa.

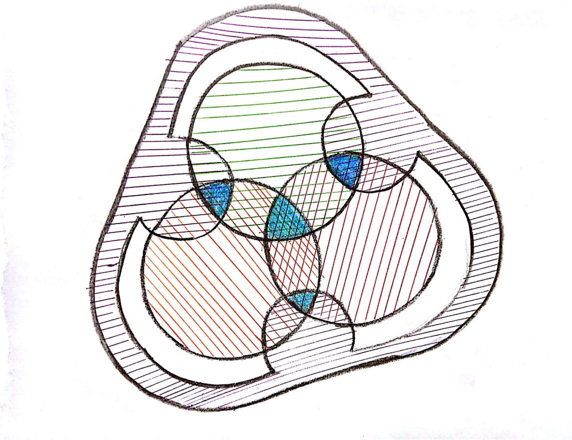


Algunas propiedades de convexos

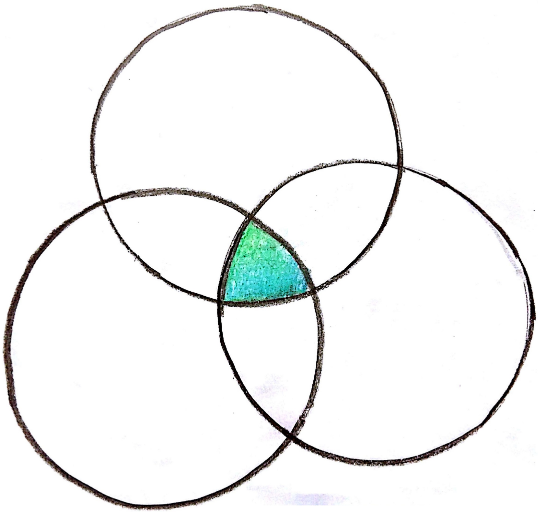


Diferencia entre intersección local y global

Si tenemos una familia de conjuntos arbitrarios, el hecho de que se intersecten de dos en dos, o de tres en tres no garantiza que *todos* se intersecten.



Diferencia entre intersección local y global



Teorema de Helly

Si una familia de convexos se intersecta mucho *localmente*,
entonces *todos* los convexos se intersectan.

Teorema de Helly

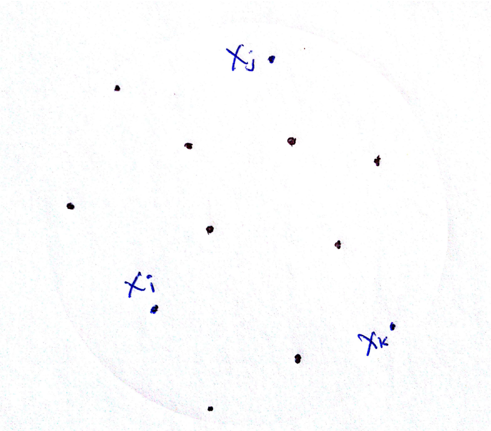
Si una familia de convexos se intersecta mucho *localmente*, entonces *todos* los convexos se intersectan.

Theorem (Teorema de Helly, 1923)

Sea $\mathcal{F}$ *una familia de convexos en* $\mathbb{R}^d$*. Si cualquier subfamilia de* $\mathcal{F}$ *de a lo más* $d+1$ *convexos se intersecta, entonces la intersección de todos los convexos de la familia es no vacía.*

Una aplicación: El problema del bar

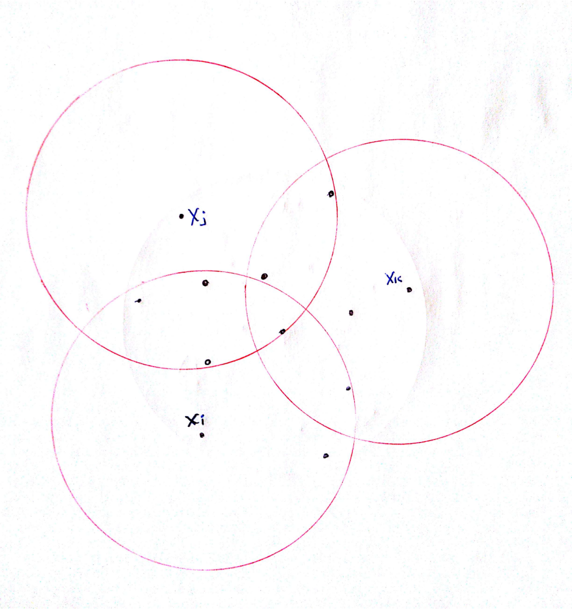
Estamos en un bar. Desafortunadamente se caen algunas aceitunas sobre la mesa y dejan algunas manchas (puntos). Para evitar problemas queremos tapar todas las manchas con un plato. Nos damos cuenta que para cualesquiera tres manchas se puede acomodar el plato para que las tape. ¿Podremos tapar todas las manchas?



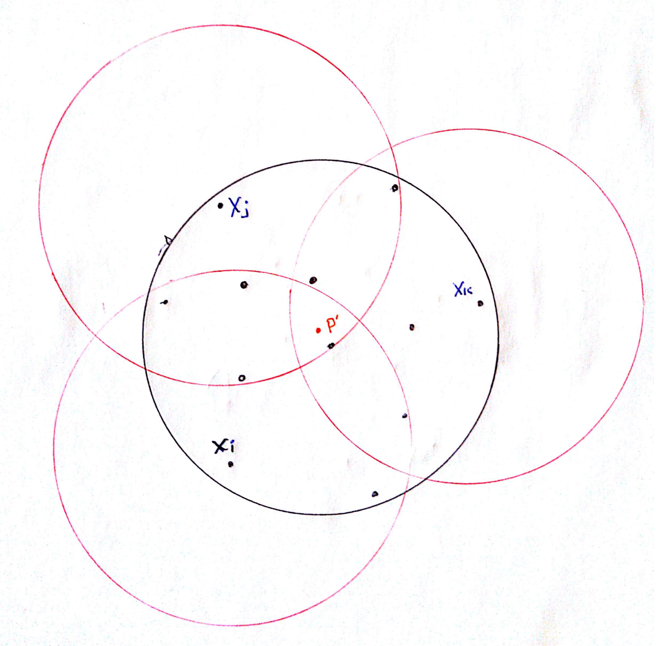
Una aplicación: El problema del bar

- Tenemos un conjunto de puntos $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Sabemos que cada tres se cubren con un círculo de radio 1.
- Tomemos tres de ellos x_i, x_j, x_k y C el círculo unitario que los contiene de centro p.
- Tomemos los círculos unitarios C_i, C_j, C_k centrados en ellos. Por simetría, p está en cada uno de ellos.
- Entonces por Helly, estos círculos centrados en los puntos de P se intersectan todos en un punto p'.
- De nuevo, por simetría, este círculo contiene a todos los puntos de p.

Una aplicación: El problema del bar



Una aplicación: El problema del bar



Hiperplanos y semiespacios

Profundidad de Tukey

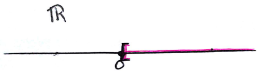
Definición

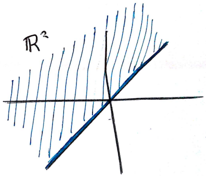
Un hiperplano es un conjunto de $\mathbb{R}^d$ *que se obtiene de trasladar un suberspacio lineal de* $\mathbb{R}^d$ *de dimensión* $d-1$.

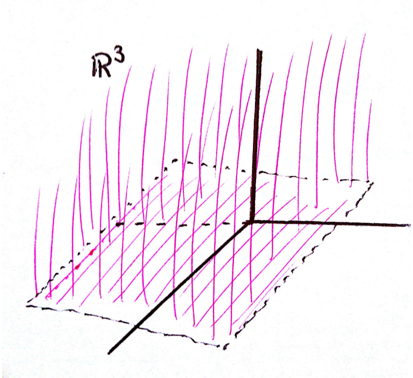
Definición

Un semiespacio es una de las regiones delimitadas por un hiperplano.

Ejemplos







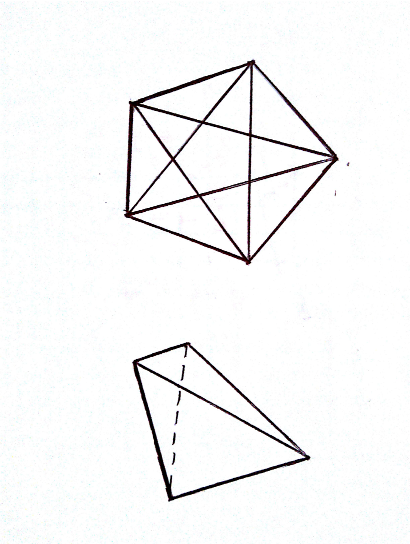
Profundidad de Tukey

Definición

Consideremos un conjunto finito de puntos P en $\mathbb{R}^d$ y sea x un punto en $\mathbb{R}^d$. Definimos

$$dep_P(x) = \min\{|H \cap P| : \text{ } H \textit{ es un semiespacio que contiene a } x\}$$

Ejemplos en el plano y el espacio



Teorema del punto central

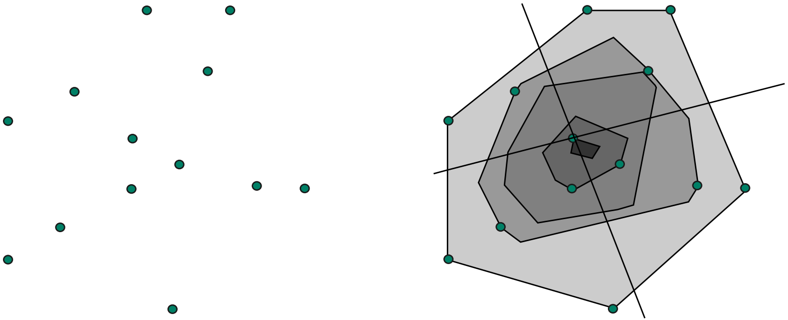


Figure: Ejemplo de profundidad de Tukey con 13 puntos

Teorema del punto central

Theorem (Teorema del punto central)

Sea P un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^d$. Entonces siempre existe un punto de profundidad $\frac{|P|}{d+1}$.

Profundidad familiar

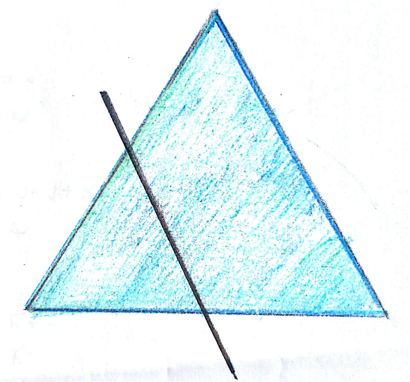
Definición

Consideremos una familia finita F de convexos en $\mathbb{R}^d$ y sea x un punto en $\mathbb{R}^d$. Definimos

$$dep_F(x) = \min\{|\{C \in F : C \cap H \neq \emptyset\}|\}$$

donde el mínimo se toma sobre los semiespacios H que tienen a x.

Ejemplos de profundidad familiar



Pregunta de estudio

- Si tenemos n convexos, el Teorema del punto central garantiza un punto de profundidad al menos $\frac{n}{d+1}$.
- El Teorema de Helly nos dice que si n convexos se intersectan de $d+1$ en $d+1$, entonces todos se intersectan y hay un punto cuya profundidad familiar es n.
- ¿Qué pasa si bajamos un poco las hipótesis?

Pregunta de estudio

- Si tenemos n convexos, el Teorema del punto central garantiza un punto de profundidad al menos $\frac{n}{d+1}$.
- El Teorema de Helly nos dice que si n convexos se intersectan de $d+1$ en $d+1$, entonces todos se intersectan y hay un punto cuya profundidad familiar es n.
- ¿Qué pasa si bajamos un poco las hipótesis?

Problema

- *Si sólo sabemos que cierto porcentaje de las parejas de convexos se intersectan, ¿cuál es la mejor proporción que podemos garantizar?*
- *¿Podemos encontrar algunas relaciones por lo menos para familias simétricas de convexos?*

Resultados obtenidos

Segmentos en polígonos regulares

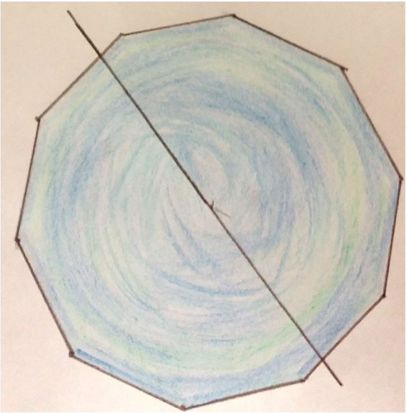
Comenzamos el estudio en el plano.

Problema

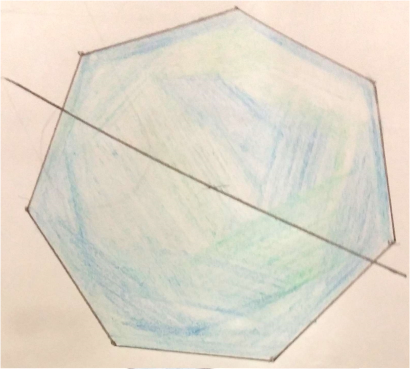
Tomemos n vértices de un polígono regular. Tomemos los segmentos que se obtienen de saltar de k en k vértices. Llamémosle a esto la familia de segmentos $S_{n,k}$

- *¿Cuál es el punto de mayor profundidad con respecto a $S_{n,k}$?*
- *¿Cuál es esa profundidad y con qué semiespacios se alcanza?*
- *¿Cuántas parejas de segmentos de $S_{n,k}$ se intersectan?*

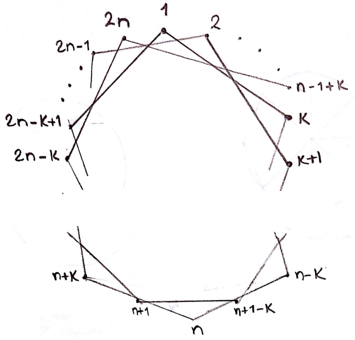
Ejemplo



Ejemplo



Saltos de k en k



$1 \longrightarrow K$

$2 \longrightarrow K+1$

$\vdots$

$2n-K \longrightarrow n$

$2n+1 \longrightarrow n+1+K$

$\vdots$

$2n-K \longrightarrow n$

$2n-K+1 \longrightarrow 1$

Resultados obtenidos

Proposición

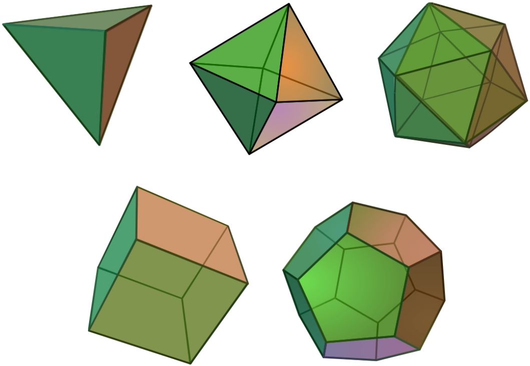
- *Si* n *es par igual a* $2r$*, entonces la mejor profundidad que se puede obtener es* $\frac{n}{2}+k$.
- *Si* n *es impar igual a* $2r+1$*, entonces la mejor profundidad que se puede obtener es* $\frac{n-1}{2}+k$.
- *En cualquier caso, hay* nk *parejas de intervalos que se intersectan.*

Caras en sólidos platónicos

¿Qué hacemos en el espacio? Lo equivalente a polígonos regulares son los sólidos platónicos.

Caras en sólidos platónicos

¿Qué hacemos en el espacio? Lo equivalente a polígonos regulares son los sólidos platónicos.



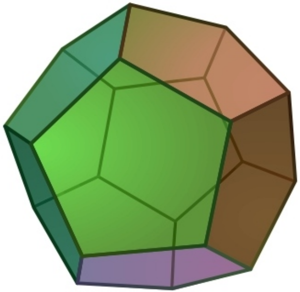
Caras en sólidos platónicos

Problema

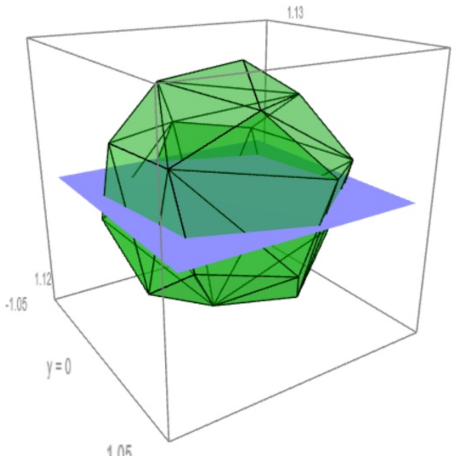
Para cada sólido platónico consideramos la familia de sus vértices, la de sus aristas y la de sus caras.

- *¿Cuál es la mejor profundidad que podemos garantizar para cada una de estas familias?*
- *¿Cuántas parejas de cada una de las familias se intersectan?*
- *¿Cómo es la relación entre estas cantidades?*

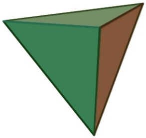
Ejemplo del dodecaedro con aristas



Apoyo computacional

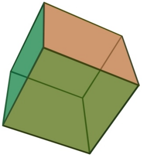


Resultados tetraedro



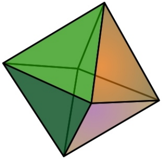
Dim	Num. Caras	Profundidad	Num. Parejas Int.
0	4	1	0
1	6	3	12
2	4	3	6

Resultados cubo



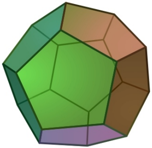
Dim	Num. Caras	Profundidad	Num. Parejas Int.
0	8	4	0
1	12	8	24
2	6	5	12

Resultados octaedro



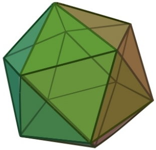
Dim	Num. Caras	Profundidad	Num. Parejas Int.
0	6	3	0
1	12	9	36
2	8	7	24

Resultados dodecaedro



Dim	Num. Caras	Profundidad	Num. Parejas Int.
0	20	10	0
1	30	18	60
2	12	9	30

Resultados icosaedro



Dim	Num. Caras	Profundidad	Num. Parejas Int.
0	12	6	0
1	30	20	120
2	20	15	30

Comentarios finales

Agradecimiento

¡Gracias por su atención!

Material que vimos en el curso: http://blog.nekomath.com/tmd

Agradecimiento

¡Gracias por su atención!

Material que vimos en el curso: http://blog.nekomath.com/tmd