El método probabilista en acción

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

IMATE - Unidad Juriquilla, UNAM
I3M - Université de Montpellier

Viernes 13 de marzo de 2015

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una propiedad P.

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una propiedad P.
- Queremos determinar si un elemento de S satisface la propiedad P.

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una propiedad P.
- Queremos determinar si un elemento de S satisface la propiedad P.
- Definimos un espacio de probabilidad en S.

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una propiedad P.
- Queremos determinar si un elemento de S satisface la propiedad P.
- Definimos un espacio de probabilidad en S.
- Mostramos que con probabilidad positiva un objeto aleatorio tiene la propiedad P.

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una propiedad P.
- Queremos determinar si un elemento de S satisface la propiedad P.
- Definimos un espacio de probabilidad en S.
- Mostramos que con probabilidad positiva un objeto aleatorio tiene la propiedad P.
- Entonces alguno de los objetos tiene la propiedad P.

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una función $f : S \to \mathbb{R}$.

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una función $f : S \to \mathbb{R}$.
- Queremos determinar si un elemento $s \in S$ satisface $f(s) \geq a$.

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una función $f : S \to \mathbb{R}$.
- Queremos determinar si un elemento $s \in S$ satisface $f(s) \geq a$.
- Definimos un espacio de probabilidad en S. La función f se convierte en una variable aleatoria.

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una función $f : S \to \mathbb{R}$.
- Queremos determinar si un elemento $s \in S$ satisface $f(s) \geq a$.
- Definimos un espacio de probabilidad en S. La función f se convierte en una variable aleatoria.
- Mostramos que $\mathbb{E}(f(s)) \geq a$.

Método probabilista

- Tenemos un conjunto S y una función $f : S \to \mathbb{R}$.
- Queremos determinar si un elemento $s \in S$ satisface $f(s) \geq a$.
- Definimos un espacio de probabilidad en S. La función f se convierte en una variable aleatoria.
- Mostramos que $\mathbb{E}(f(s)) \geq a$.
- Concluimos que para algún elemento s se tiene $f(s) \geq a$.

Alcance

- **Plantear un espacio de probabilidad adecuado.**
- **Usar estimaciones asintóticas, por ejemplo**

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

- **Usar la linealidad de la esperanza**

Alcance

- **Plantear un espacio de probabilidad adecuado.**
- **Usar estimaciones asintóticas, por ejemplo**

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

- **Usar la linealidad de la esperanza**
- Usar cotas para la varianza
- **Construir y corregir**
- Lema local de Lovasz
- Concentración vía martingalas

Problema de calentamiento

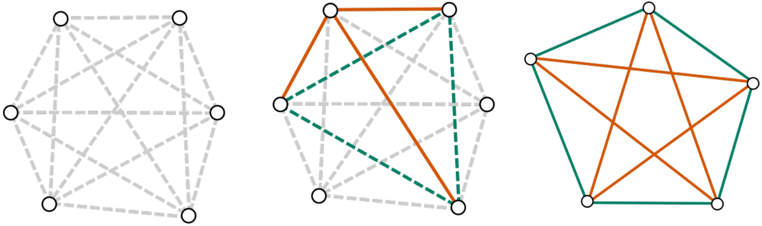
Problema

Si tenemos seis personas podemos garantizar que hay 3 *que se conocen entre sí o* 3 *que no se conocen entre sí. Si tenemos* 5 *personas, puede pasar que no suceda esto.*

Problema de calentamiento

Problema

Si tenemos seis personas podemos garantizar que hay 3 que se conocen entre sí o 3 que no se conocen entre sí. Si tenemos 5 personas, puede pasar que no suceda esto.



Teorema de Ramsey

El número de Ramsey $R(k, \ell)$ es el menor entero n tal que en cualquier 2-coloración de las aristas de la gráfica completa K_n hay un K_k naranja o un K_l verde. El ejemplo anterior muestra $R(3, 3) = 6$.

Teorema de Ramsey

El número de Ramsey $R(k, \ell)$ es el menor entero n tal que en cualquier 2-coloración de las aristas de la gráfica completa K_n hay un K_k naranja o un K_l verde. El ejemplo anterior muestra $R(3, 3) = 6$.

Teorema (Ramsey, 1929)

$R(k, l)$ es finito.

Teorema de Ramsey

El número de Ramsey $R(k, \ell)$ es el menor entero n tal que en cualquier 2-coloración de las aristas de la gráfica completa K_n hay un K_k naranja o un K_l verde. El ejemplo anterior muestra $R(3, 3) = 6$.

Teorema (Ramsey, 1929)

$R(k, l)$ es finito.

Teorema (Erdos, 1947)

Si $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, entonces $R(k, k) > n$.

En particular, $R(k, k) > \lfloor 2^{\frac{k}{2}} \rfloor$.

Demostración cota inferior

- Tomemos n como en la hipótesis. Tomemos K_n. Pintemos cada arista de verde o naranja con probabilidad $\frac{1}{2}$ de manera independiente.

Demostración cota inferior

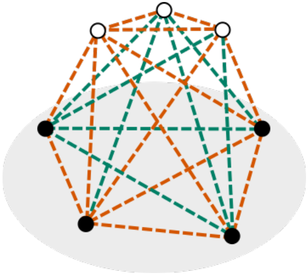
- Tomemos n como en la hipótesis. Tomemos K_n. Pintemos cada arista de verde o naranja con probabilidad $\frac{1}{2}$ de manera independiente.
- Para un conjunto A de k elementos,

$$\mathbb{P}(A \text{ es mc.}) = 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Demostración cota inferior

- Tomemos n como en la hipótesis. Tomemos K_n. Pintemos cada arista de verde o naranja con probabilidad $\frac{1}{2}$ de manera independiente.
- Para un conjunto A de k elementos,

$$\mathbb{P}(A \text{ es mc.}) = 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$



Demostración cota inferior.

$$\mathbb{P}(\text{Hay mc.}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{A} A \text{ es mc.}\right) \leq \sum_{A} \mathbb{P}(A \text{ es mc.}) = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$$

Demostración cota inferior.

$$\mathbb{P}(\text{Hay mc.}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_A A \text{ es mc.}\right) \leq \sum_A \mathbb{P}(A \text{ es mc.}) = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$$

- Por hipótesis, $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$.
- Así, $\mathbb{P}(\text{No hay mc.}) > 0$, y por lo tanto existe una coloración sin K_k monocromático.

Demostración cota inferior.

$$\mathbb{P}(\text{Hay mc.}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_A A \text{ es mc.}\right) \leq \sum_A \mathbb{P}(A \text{ es mc.}) = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$$

- Por hipótesis, $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$.
- Así, $\mathbb{P}(\text{No hay mc.}) > 0$, y por lo tanto existe una coloración sin K_k monocromático. $R(k,k) > \lfloor 2^{\frac{k}{2}} \rfloor$.

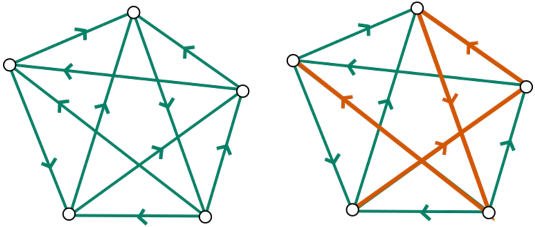
Demostración cota inferior.

$$\mathbb{P}(\text{Hay mc.}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_A A \text{ es mc.}\right) \leq \sum_A \mathbb{P}(A \text{ es mc.}) = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$$

- Por hipótesis, $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$.
- Así, $\mathbb{P}(\text{No hay mc.}) > 0$, y por lo tanto existe una coloración sin K_k monocromático. $R(k,k) > \lfloor 2^{\frac{k}{2}} \rfloor$.
- No es constructivo, pero "da un algoritmo".

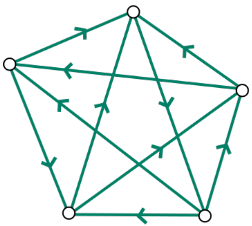
Uno rápido de esperanza

- Un *torneo* es una gráfica completa en la cual a cada arista se le ha dado una dirección.
- Una *trayectoria hamiltoniana* en un torneo es una trayectoria que respeta las direcciones y pasa por todos los vértices.



Uno rápido de esperanza

- Un *torneo* es una gráfica completa en la cual a cada arista se le ha dado una dirección.
- Una *trayectoria hamiltoniana* en un torneo es una trayectoria que respeta las direcciones y pasa por todos los vértices.



- ¿Cuántas trayectorias hamiltonianas puede tener un torneo de n vértices?

Uno rápido de esperanza

Teorema (Szele, 1943)

Existe un torneo de n vértices con al menos $\frac{n!}{2^{n-1}}$ trayectoras hamiltonianas.

Uno rápido de esperanza

Teorema (Szele, 1943)

Existe un torneo de n vértices con al menos $\frac{n!}{2^{n-1}}$ trayectoras hamiltonianas.

- Tomamos el torneo aleatorio T en n vértices. Sea X la v.a. que cuenta el número de trayectorias hamiltonianas.

Uno rápido de esperanza

Teorema (Szele, 1943)

Existe un torneo de n vértices con al menos $\frac{n!}{2^{n-1}}$ trayectoras hamiltonianas.

- Tomamos el torneo aleatorio T en n vértices. Sea X la v.a. que cuenta el número de trayectorias hamiltonianas.
- Para cada permutación σ, X_σ es 1 si recorriendo según el orden de σ obtenemos una trayectoria hamiltoniana y 0 si no.

Uno rápido de esperanza

Teorema (Szele, 1943)

Existe un torneo de n vértices con al menos $\frac{n!}{2^{n-1}}$ trayectoras hamiltonianas.

- Tomamos el torneo aleatorio T en n vértices. Sea X la v.a. que cuenta el número de trayectorias hamiltonianas.
- Para cada permutación σ, X_σ es 1 si recorriendo según el orden de σ obtenemos una trayectoria hamiltoniana y 0 si no.

$$\mathbb{X}_\sigma = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = 2^{-(n-1)}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum \mathbb{E}(X_\sigma) = n! \cdot 2^{-(n-1)}$$

Uno rápido de esperanza

Teorema (Szele, 1943)

Existe un torneo de n vértices con al menos $\frac{n!}{2^{n-1}}$ trayectoras hamiltonianas.

- Tomamos el torneo aleatorio T en n vértices. Sea X la v.a. que cuenta el número de trayectorias hamiltonianas.
- Para cada permutación σ, X_σ es 1 si recorriendo según el orden de σ obtenemos una trayectoria hamiltoniana y 0 si no.

$$\mathbb{X}_\sigma = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = 2^{-(n-1)}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum \mathbb{E}(X_\sigma) = n! \cdot 2^{-(n-1)}$$

- Entonces algún torneo satisface que tiene al menos $\mathbb{E}(X)$ trayectorias hamiltonianas.

El problema de los ángulos

- Tomemos $d \geq 1$ un entero.

El problema de los ángulos

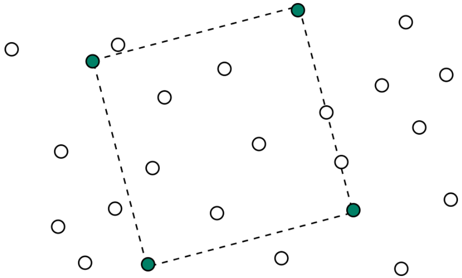
- Tomemos $d \geq 1$ un entero.
- Tomemos puntos en $\mathbb{R}^d$ de modo que todo ángulo sea menor o igual a $\frac{\pi}{2}$.

El problema de los ángulos

- Tomemos $d \geq 1$ un entero.
- Tomemos puntos en $\mathbb{R}^d$ de modo que todo ángulo sea menor o igual a $\frac{\pi}{2}$.
- ¿Cuál es la máxima cantidad de puntos que podemos tener?

El problema de los ángulos

- Tomemos $d \geq 1$ un entero.
- Tomemos puntos en $\mathbb{R}^d$ de modo que todo ángulo sea menor o igual a $\frac{\pi}{2}$.
- ¿Cuál es la máxima cantidad de puntos que podemos tener?



El problema de los ángulos

Teorema (Danzer y Grunbaum, 1962)

Un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^d$ *tal que todos sus ángulos determinados por tres puntos son menores o iguales a* $\frac{\pi}{2}$ *tiene a lo más* 2^d *puntos.*

El problema de los ángulos

Teorema (Danzer y Grunbaum, 1962)

Un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^d$ tal que todos sus ángulos determinados por tres puntos son menores o iguales a $\frac{\pi}{2}$ tiene a lo más 2^d puntos.

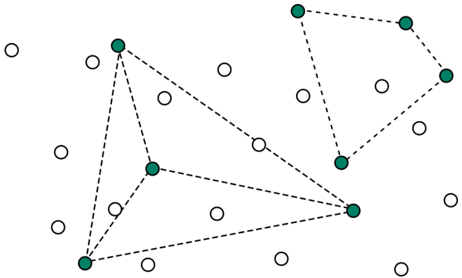
- ¿Qué sucede si los ángulos son menores que $\frac{\pi}{2}$ estrictamente?

El problema de los ángulos

Teorema (Danzer y Grunbaum, 1962)

Un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^d$ tal que todos sus ángulos determinados por tres puntos son menores o iguales a $\frac{\pi}{2}$ tiene a lo más 2^d puntos.

- ¿Qué sucede si los ángulos son menores que $\frac{\pi}{2}$ estrictamente?



El problema de los ángulos

Conjetura (Danzer y Grunbaum, 1962)

A lo más hay $2d - 1$ *puntos.*

El problema de los ángulos

Conjetura (Danzer y Grunbaum, 1962)

A lo más hay $2d - 1$ *puntos.*

Teorema (Erdos y Furedi, 1983)

Para toda $d \geq 1$*, existe un conjunto de al menos* $\left\lfloor \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^d \right\rfloor$ *puntos en* $\mathbb{R}^d$ *tal que todos los ángulos determinados por tres puntos son estrictamente menores a* $\frac{\pi}{2}$*.*

Construir y corregir

- A veces el método probabilista **no** da un ejemplo directo.

Construir y corregir

- A veces el método probabilista **no** da un ejemplo directo.
- **Idea:** Usar el método para construir un ejemplo con *pocos* problemas. Corregirlos al final.

Construir y corregir

- A veces el método probabilista **no** da un ejemplo directo.
- **Idea:** Usar el método para construir un ejemplo con *pocos* problemas. Corregirlos al final.
- Tomaremos vectores en $\{0, 1\}^d$ aleatoriamente.

Construir y corregir

- A veces el método probabilista **no** da un ejemplo directo.
- **Idea:** Usar el método para construir un ejemplo con *pocos* problemas. Corregirlos al final.
- Tomaremos vectores en $\{0,1\}^d$ aleatoriamente.
- Caracterizaremos cuándo tres de ellos hacen un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

Construir y corregir

- A veces el método probabilista **no** da un ejemplo directo.
- **Idea:** Usar el método para construir un ejemplo con *pocos* problemas. Corregirlos al final.
- Tomaremos vectores en $\{0,1\}^d$ aleatoriamente.
- Caracterizaremos cuándo tres de ellos hacen un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.
- Encontraremos un ejemplo con *pocos* ángulos rectos.

Construir y corregir

- A veces el método probabilista **no** da un ejemplo directo.
- **Idea:** Usar el método para construir un ejemplo con *pocos* problemas. Corregirlos al final.
- Tomaremos vectores en $\{0,1\}^d$ aleatoriamente.
- Caracterizaremos cuándo tres de ellos hacen un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.
- Encontraremos un ejemplo con *pocos* ángulos rectos.
- Desecharemos algunos vértices para deshacernos de estos ángulos rectos. Como son pocos ángulos rectos, todavía nos queda un ejemplo con suficientes puntos.

Ángulos en el cubo

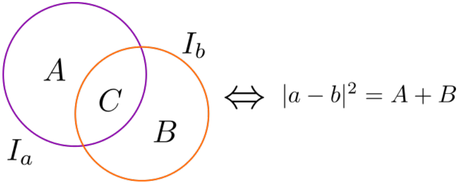
- Para $a \in \{0,1\}^d$ definimos $I_a := \{i \mid a_i = 1\}$.

Ángulos en el cubo

- Para $a \in \{0,1\}^d$ definimos $I_a := \{i \mid a_i = 1\}$.
- Para $a, b \in \{0,1\}^d$, tenemos $|a-b|^2 = |I_a \cup I_b| - |I_a \cap I_b|$.

Ángulos en el cubo

- Para $a \in \{0,1\}^d$ definimos $I_a := \{i \mid a_i = 1\}$.
- Para $a, b \in \{0,1\}^d$, tenemos $|a-b|^2 = |I_a \cup I_b| - |I_a \cap I_b|$.



- Teorema de Pitágoras

Ángulos en el cubo

Lema

Para $a, b, c \in \{0,1\}^d$ *siempre se tiene* $\angle abc \leq \frac{\pi}{2}$ *y*

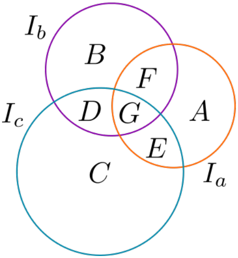
$$\angle abc = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad I_a \cap I_c \subseteq I_b \subseteq I_a \cup I_c$$

Ángulos en el cubo

Lema

Para $a, b, c \in \{0,1\}^d$ *siempre se tiene* $\angle abc \leq \frac{\pi}{2}$ *y*

$$\angle abc = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad I_a \cap I_c \subseteq I_b \subseteq I_a \cup I_c$$



$$\begin{array}{r} B+F+C+E \\ +\,B+D+A+E \\ \hline A+F+C+D \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$B+E=0$$

$$\Leftrightarrow$$

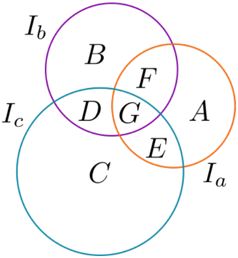
$$I_a \cap I_c \subseteq I_b \subseteq I_a \cup I_c$$

Ángulos en el cubo

Lema

Para $a, b, c \in \{0,1\}^d$ siempre se tiene $\angle abc \leq \frac{\pi}{2}$ y

$$\angle abc = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad I_a \cap I_c \subseteq I_b \subseteq I_a \cup I_c$$



$$\begin{array}{r} B + F + C + E \\ + \, B + D + A + E \\ \hline A + F + C + D \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$B + E = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$I_a \cap I_c \subseteq I_b \subseteq I_a \cup I_c$$

$\Leftrightarrow$ Para toda i si $a_i = c_i$, entonces $a_i = b_i = c_i$.

Probabilidad

- Tomemos $2m$ vectores en $\{0,1\}^d$. En cada vector elegimos cada entrada como 0 o 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$, todas ellas de manera independiente.

Probabilidad

- Tomemos $2m$ vectores en $\{0,1\}^d$. En cada vector elegimos cada entrada como 0 o 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$, todas ellas de manera independiente.
- Sea X la v.a. que cuenta el número de ángulos rectos en este acomodo. Calcularemos $\mathbb{E}(X)$ partiendo en indicadoras por ternas.

Probabilidad

- Tomemos $2m$ vectores en $\{0,1\}^d$. En cada vector elegimos cada entrada como 0 o 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$, todas ellas de manera independiente.
- Sea X la v.a. que cuenta el número de ángulos rectos en este acomodo. Calcularemos $\mathbb{E}(X)$ partiendo en indicadoras por ternas.
- Para que la terna a, b, c defina un ángulo recto en b, en cada coordenada debemos evitar que $a_i = c_i = 0, b_i = 1$ y también $a_i = c_i = 1, b_i = 0$.

Probabilidad

- Tomemos $2m$ vectores en $\{0,1\}^d$. En cada vector elegimos cada entrada como 0 o 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$, todas ellas de manera independiente.
- Sea X la v.a. que cuenta el número de ángulos rectos en este acomodo. Calcularemos $\mathbb{E}(X)$ partiendo en indicadoras por ternas.
- Para que la terna a, b, c defina un ángulo recto en b, en cada coordenada debemos evitar que $a_i = c_i = 0, b_i = 1$ y también $a_i = c_i = 1, b_i = 0$.
- Así, a, b, c forma un ángulo recto en b con probabilidad $\left(\frac{3}{4}\right)^d$.

Construir y corregir

- De este modo

$$\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \binom{2m}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{d}.$$

Construir y corregir

- De este modo

$$\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \binom{2m}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{d}.$$

- Hasta aquí no podemos concluir la existencia de un acomodo de tamaño $2m$ sin ángulos rectos.

Construir y corregir

- De este modo
$$\mathbb{E}(X) = 3 \cdot \binom{2m}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d .$$
- Hasta aquí no podemos concluir la existencia de un acomodo de tamaño $2m$ sin ángulos rectos.
- Sin embargo, tomando $m = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d \right\rfloor$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 3 \cdot \binom{2m}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d \leq 3 \cdot \frac{8m^3}{6} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d \\ &\leq \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^d \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d . \end{aligned}$$

Construir y corregir

- Como $\mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d$ y X toma valores enteros, entonces existe un acomodo con

$$X \leq \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d \right\rfloor = m.$$

Construir y corregir

- Como $\mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d$ y X toma valores enteros, entonces existe un acomodo con
$$X \leq \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d \right\rfloor = m.$$
- Ahora corregimos. Teníamos $2m$ puntos inicialmente. Quitamos un punto por cada ángulo recto.

Construir y corregir

- Como $\mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d$ y X toma valores enteros, entonces existe un acomodo con
$$X \leq \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d \right\rfloor = m.$$
- Ahora corregimos. Teníamos $2m$ puntos inicialmente. Quitamos un punto por cada ángulo recto.
- Nos quedan m puntos con la propiedad deseada.

Agradecimiento y contacto

Contacto

leomtz@im.unam.mx

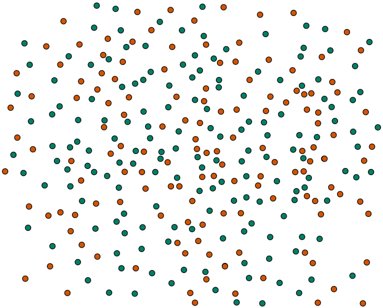
http://blog.nekomath.com

Agradecimiento y contacto

Contacto

`leomtz@im.unam.mx`

`http://blog.nekomath.com`



¡Gracias por su atención!