

V Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2015

Primera Etapa

Sábado 25 de abril de 2015

Bienvenido a la Primera Etapa del V Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether

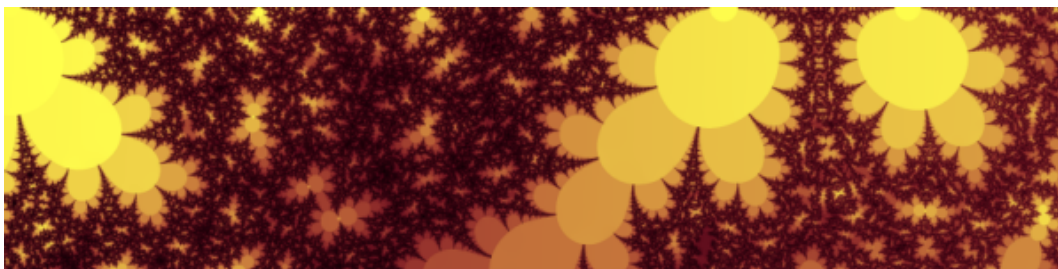


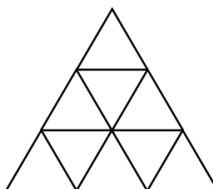
Imagen de fractal por Ken (<http://goo.gl/A4ghhn>) - CC-BY 2.0

- Resuelve el examen en la hoja de respuestas anexa. Cada respuesta correcta vale un punto.
- Tienes 3 horas para resolver el examen.
- Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.

1. Se tienen tres enteros positivos $a > b > c > 10$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la más grande?

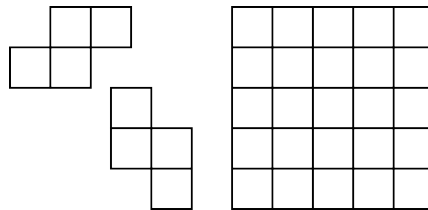
- (a) $2^a + 2^b + 2^c$ (b) $2^{a+b} + 2^c$ (c) $2^a + 2^{b+c}$ (d) 2^{a+b+c}

2. El siguiente triángulo está hecho por pequeños triángulos equiláteros de lado 1. Se van a pintar de azul algunos segmentos de longitud 1. ¿Cuál es la máxima cantidad de segmentos que se pueden pintar de modo que ningún triángulo pequeño tenga sus tres lados azules?



- (a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 18

3. El número 371, 313 tiene 6 divisores. Encuentra su factorización en primos.
 (a) $3 \cdot 123771$ (b) $3^2 \cdot 41257$ (c) $3^3 \cdot 13759$ (d) 13^5
4. Los números reales a, b y c satisfacen que $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Determina el valor de $a + b + c$.
 (a) 3 (b) 1 (c) $\frac{1}{3}$ (d) 0
5. Encuentra los valores de x que hacen que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sea cero.
 (a) $x = -1, -2$ (b) $x = 1, 2$ (c) $x = 1, -2$ (d) $x = -1, 2$
6. ¿Para cuántos enteros positivos n se satisface que $n^2 - 9$ divide a $20n - 60$?
 (a) 4 (b) 5 (c) 10 (d) 20
7. Se toma un número n . La suma de los números pares $2 + 4 + \dots + 2n$ es A . La suma de los números impares $1 + 3 + \dots + (2n - 1)$ es B . Si $A - B$ es 100, ¿cuál es el valor de n ?
 (a) 100 (b) 101 (c) 200 (d) 201
8. Sea ABC un triángulo con los tres lados distintos. ¿Cuántos triángulos existen que sean congruentes a ABC y que compartan exactamente dos vértices con ABC ?
 (a) 12 (b) 9 (c) 6 (d) 3
9. En un tablero se 5×5 colocan fichas Z o sus rotaciones. Se permite que las fichas de traslapen, pero no que se salgan del tablero. ¿Cuál es el mínimo número de piezas que se deben poner para que las fichas cubran todo el tablero?



- (a) 10 (b) 9 (c) 8 (d) 7
10. Se toman algunos números x, y, z en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ¿Para cuántas ternas ordenadas (x, y, z) se cumple que 7 divide a $x^2 + y^2 - z^2$? **Nota:** Son ternas ordenadas así que por ejemplo $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$ cuentan como ternas diferentes.
 (a) 7 (b) 25 (c) 42 (d) 49

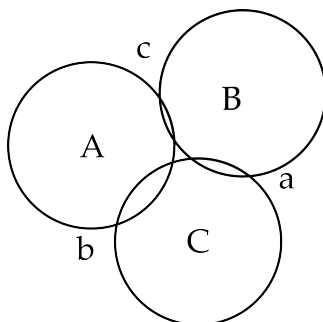
19. Considera los polinomios

$$p_1(x) = x(x - 1) \quad p_2(x) = (x - 1)(x - 2) \quad p_3(x) = (x - 2)(x - 3) \quad p_4(x) = (x - 3)(x - 4).$$

¿Cuál de las siguientes cuaternas (a_1, a_2, a_3, a_4) hace que $a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4 = 0$?

- (a) $(1, -3, 3, -1)$ (b) $(1, -4, 6, -4)$ (c) $(1, 3, 3, 1)$ (d) $(1, 4, 6, 4)$

20. Tres circunferencias tienen el mismo radio. Ningún punto del plano está en el interior de las tres, pero se intersectan de dos en dos como en el dibujo. Las intersecciones de dos en dos tienen áreas a, b, c como se indica. Las áreas que quedan al quitar las intersecciones son A, B y C como se indica. Si $A > B > C$, ¿qué podemos decir de a, b y c ?



- (a) $a > b > c$ (b) $a < b < c$ (c) $a = b = c$ (d) No podemos asegurar desigualdades

21. Determina el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - x^2}{2x \sin x - 2x^2}$.

- (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

22. La matriz A es de $n \times n$ para n un entero positivo impar. Si se cumple que $A \cdot A^T = I$, ¿cuánto vale $\det(A^2 - I)$? **Nota:** I es la matriz identidad de $n \times n$.

- (a) $-\sqrt{2}$ (b) -1 (c) 0 (d) $\sqrt{2}$

23. Se tiene el conjunto de 3 elementos $X = \{1, 2, 3\}$. Queremos escoger una familia U de subconjuntos de X de modo que 1) \emptyset está en U , 2) X está en U y 3) si A y B están en U , entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también están en U . ¿De cuántas formas podemos elegir a U ?

- (a) 9 (b) 27 (c) 29 (d) 64

24. Considera la función $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$. Determina el valor de $f(1) + f(2) + \dots + f(12)$.

- (a) 62 (b) 124 (c) 182 (d) 364

25. Después de resolver el problema de Cheryl, a Évariste le dio curiosidad de saber la fecha de cumpleaños de Emmy. Como Emmy es famosa, la buscó en Wikipedia. Se dio cuenta que nació el día x del mes número y . Le dio mucho gusto ver que x y y eran números primos que terminaban en el mismo dígito. Tú sabes sólo esta información. Si quisieras determinar el valor de x y de y , ¿cuál de las siguientes informaciones te permiten determinarlo?

- (a) El valor de y (b) El valor de $x - y$ (c) El valor de $x + y$ (d) Ninguno funciona