Proceso Selectivo para la XXII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2015

- Primer examen selectivo: 21 de febrero
- Segundo examen selectivo: 7 de marzo
- Tercer examen selectivo: 21 de marzo
- Cuarto examen selectivo: 4 de abril
- Resultados finales: 8 de abril
- XXII IMC: 27 de julio al 2 de agosto

Examen selectivo D

Un matemático, como un pintor o un poeta, es un constructor de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de aquellos, es por que están hechos de ideas.
G. H. Hardy, A Mathematicians Apology

D1. Galois tiene cartas numeradas de 1 a 5. Las acomoda en una línea, de izquierda a derecha, en algún orden. Noether puede ordenar las cartas para que queden $(1, 2, 3, 4, 5)$ usando tres transposiciones, pero no menos. ¿De cuántas formas pudo haber acomodado las cartas Galois?

Nota: Una *transposición* consiste en intercambiar dos cartas de lugar.

D2. Un número es *afortunado* si se puede escribir en alguna base como un número de cuatro dígitos iguales. Por ejemplo, 80 es afortunado pues escrito en base 3 es 2222_3. Encuentra el mayor número afortunado que sea menor a 2000.

D3. Se tienen n funciones cuadráticas $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ (para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) con coeficientes reales (y $a_i \neq 0$ para toda i). Las gráficas de estas funciones son n parábolas que sabemos que de dos en dos son tangentes. Muestra que las n parábolas pasan por un mismo punto.

Nota. Dos parábolas son *tangentes* si hay un punto en el que se intersectan y en ese punto tienen una recta tangente en común.

D4. Muestra que no existe un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ para el cual sucedan las siguientes dos condiciones simultáneamete:

- Para todo $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $B_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ es finito.
- Para todo $y \in \mathbb{R}$, el conjunto $C_y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \notin A\}$ es numerable.

Nota. Un conjunto A es *numerable* si $A = \emptyset$, o si existe una función suprayectiva de $\mathbb{N}$ a A.

D5. Prueba que existen por lo menos 2005 enteros $n_1, n_2, \ldots, n_{2005}$ tales que n_i^{27} tiene exactamente 2005 dígitos para toda $i \in \{1, 2, \ldots, 2005\}$ y además tales que para cualesquiera dos índices i y j se cumple que n_i^{27} puede obtenerse a partir de n_j^{27} permutando sus dígitos.

Examen selectivo D
Soluciones

D1. Como cada aplicación de transposiciones tiene su inverso, la pregunta es equivalente a ver a cuántas permutaciones se puede llegar con tres transposiciones y no menos. Supongamos que las tres transposiciones se hacen en $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ y $\{e,f\}$, en ese orden. Sea $A=\{a,b\}\cup\{c,d\}\cup\{e,f\}$. Contaremos de acuerdo al número de elementos en A. Como $a\neq b$, entonces $|A|\geq 2$.

- Si $|A|=2$, entonces $\{a,b\}=\{c,d\}=\{e,f\}$ y por tanto la misma transposición se aplicó tres veces. Estos casos no cuentan pues se pueden obtener aplicando esa transposición únicamente una vez.
- Si $|A|=3$, entonces sólo están involucrados 3 elementos. Cualquier permutación de 3 elementos se puede obtener con 2 transposiciones, así que estos casos tampoco cuentan.
- Si $|A|=4$, podemos elegir los 4 elementos involucrados de 5 formas. Digamos que son $\{1,2,3,4\}$. De las 24 permutaciones de 4 elementos hay 15 con un punto fijo (y por lo tanto les bastan dos permutaciones o menos) y 3 que usan transposiciones de la forma $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ con a,b,c,d distintos. Las 6 permutaciones restantes son las que necesitan tres transposiciones. Así, en este caso tenemos $5\cdot 6=30$ permutaciones.
- Si $|A|=5$, de las tres parejas hay dos que se intersectan. Si la tercer pareja también intersecta a alguna de las primeras, entonces $|A|\leq 4$. De esta forma, la tercer pareja tiene que ser ajena a la unión de las primeras dos. Podemos elegir a esta pareja de $\binom{5}{2}=10$ formas.

  Una vez determinada, los otros tres elementos necesitan una permutación que requiera exactamente dos transposiciones. Para 3 elementos hay $3!=6$ permutaciones, $\binom{3}{2}$ usan una transposición y una (la identidad) no usa transposiciones. Así, quedan 2 permutaciones que requieren 2 transposiciones.

  Esto da en total 20 permutaciones en este caso.

Concluimos que hay $30+20=50$ permutaciones que requieren exactamente tres transposiciones. $\square$

D2. Llamemos X al número que buscamos. Como X es afortunado, tenemos que $X=d(1+b+b^2+b^3$ para algún entero positivo b y para algún entero $d\in\{1,2,\ldots,b-1\}$. Sabemos que

$$b^3\leq 1+b+b^2+b^3\leq X\leq 2000.$$

Notemos que $13^3=2197$, así que $b\leq 12$. Notemos además que $1885=1+12+12^2+12^3$ es afortunado, pues en base 12 tiene cuatro dígitos iguales a 1. Como X es el mayor número, tenemos que

$$1885\leq X\leq b^4-1.$$

Como $6^4=1296<1885$, entonces $b\geq 7$. Notemos que para $b=7,8,9,10,11$ el valor de la expresión $1+b+b^2+b^3$ es respectivamente $400,585,820,1111,1464$. Ninguno de estos números tiene múltiplos en el intervalo $(1885, 2000)$, y esos múltiplos serían los únicos candidatos afortunados. De este modo, el número afortunado más grande es 1885. $\square$

D3. Sea P_i la parábola correspondiente a f_i (para $i \in \{1, \dots, n\}$) y $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Para una parábola P denotaremos con P^+ a la región del plano que queda por arriba de P (incluyendo a P).

Lema Si P_i y P_j están en $\mathcal{P}$, entonces

$$P_i^+ \subseteq P_j^+ \quad \text{o bien} \quad P_i^+ \subseteq P_j^+.$$

Demostración Tomemos dos parábolas en $\mathcal{P}$. Ya que las parábolas son tangentes, tenemos que $f_i(t) = f_j(t)$ para algún real t y además las derivadas coinciden en ese punto, es decir $f_i'(t) = f_j'(t)$. Así, t es una raíz doble del polinomio $(f_i - f_j)(t)$ que es de grado a lo más dos y por lo tanto

$$(f_i - f_j)(t) = c(x-t)^2.$$

De esta forma, dependiendo del signo de c, tenemos que o bien $f_i(t) \geq f_j(t)$ para todo real t o bien $f_j(t) \geq f_i(t)$ para todo real t. Esto implica la afirmación del lema.

$\square$

Por el lema, podemos reordenar las etiquetas de las parábolas de $\mathcal{P}$ de modo que

$$P_1^+ \subseteq P_2^+ \subseteq P_3^+ \subseteq \ldots \subseteq P_n^+.$$

Tenemos que P_1 debe tocar a P_n, digamos para $x = t$. Entonces:

$$f_1(t) \leq f_2(t) \leq f_3(t) \leq \ldots \leq f_n(t) = f_1(t).$$

Así, se debe cumplir la igualdad en toda la cadena y por lo tanto el punto $(t, g_1(t))$ está en todas las parábolas. $\square$

D4. Definamos A_y como el complemento de C_y, es decir

$$A_y = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x, y) \in A\}.$$

Procedamos por contradicción, suponiendo que B_x es finito para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} - A_y$ es numerable para todo $y \in \mathbb{R}$. Afirmamos que

$$\bigcap_{y=1}^{\infty} A_y = \mathbb{R} - \bigcup_{y=1}^{\infty} (\mathbb{R} - A_y) \neq \emptyset.$$

En efecto, a $\mathbb{R}$ le estamos quitando $\bigcup_{y=1}^{\infty}(\mathbb{R} - A_y)$, el cual es una unión numerable de conjuntos numerables. Como $\mathbb{R}$ es no numerable, entonces deben sobrar elementos.

Tomemos x en $\bigcap_{y=1}^{\infty} A_y$. Esto quiere decir que $\{1,2,3,\ldots\} \subseteq B_x$. Pero esto es una contradicción, pues habíamos supuesto que cada B_x era finito. Esto muestra que no hay conjuntos como los requeridos. $\square$

D5. Primero daremos una estimación de cuántos tipos de números existen con 2005 dígitos salvo una permutación de sus dígitos. Cada tipo queda determinado por $a_0, a_1, \ldots, a_9$, donde a_i es la cantidad de dígitos i que se usan y $a_0 + \ldots + a_9 = 2005$. De este modo, la cantidad de tipos de número es a lo más el número de soluciones para $a_0 + \ldots + a_9 = 2005$, con $x_i \leq 0$ para $i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, el cual es

$$\binom{2005+9}{9} = \binom{2014}{9} < 2014^9 < (10^4)^9 = 10^{36}.$$

Ahora estimaremos cuántas potencias 27−ésimas tienen 2005 dígitos. Tenemos que n^{27} tiene 2005 dígitos si y sólo si

$$10^{2004} \leq n^{27} < 10^{2005} \quad \Leftrightarrow \quad 10^{\frac{2004}{27}} \leq n < 10^{\frac{2005}{27}}.$$

Ese intervalo para n tiene al menos $10^{\frac{2005}{27}} - 10^{\frac{2004}{27}}$ elementos. Además, usando la estimación de Taylor $e^x - 1 > x$, tenemos

$$\begin{aligned} 10^{\frac{2005}{27}} - 10^{\frac{2004}{27}} &= 10^{\frac{2004}{27}} \left(10^{\frac{1}{27}} - 1\right) = 10^{\frac{2004}{27}} \left(e^{\frac{\log(10)}{27}} - 1\right) \\ &> 10^{\frac{2004}{27}} \cdot \frac{\log(10)}{27} > 10^{74} \cdot \frac{\log(10)}{27} > 10^{72} > 2005 \cdot 10^{36}. \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos al menos $2005 \cdot 10^{36}$ potencias 27−ésimas de 2005 dígitos repartidas en a lo más 10^{36} tipos de números. Por el principio de las casillas debe haber al menos 2005 de ellas con el mismo tipo, que es precisamente lo que queríamos mostrar.

$\square$