Proceso Selectivo para la XXII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2015

- Primer examen selectivo: 21 de febrero
- Segundo examen selectivo: 7 de marzo
- Tercer examen selectivo: 21 de marzo
- Cuarto examen selectivo: 4 de abril
- Resultados finales: 8 de abril
- XXII IMC: 27 de julio al 2 de agosto

Examen selectivo A

Debo mencionar un poco más esto de la edad, pues es particularmente importante para los matemáticos. Ningún matemático debe permitirse olvidar que las matemáticas, más que cualquier otra ciencia o arte, es un juego para jóvenes.
G. H. Hardy, A Mathematicians Apology

A1. En la esquina de un cuarto se juntan tres paredes perpendiculares por parejas. Se coloca una esfera S de radio 1 en esta esquina de modo que sea tangente a las tres paredes. Encuentra el radio de la mayor esfera que cabe entre la esquina y S.

A2. Determina todas las sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de números reales que satisfacen

$$|x_m - x_n| \leq \frac{2mn}{m^2+n^2}$$

para todos los enteros positivos m y n.

A3. Los puntos en $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ son los vértices de un pentágono regular en el plano. Se coloca un entero no negativo en cada una de las once regiones interiores de este pentágono. Para cada uno de los diez triángulos T con vértices en A definimos $S(T)$ como la suma de todos los números dentro de T. Si queremos que para cualquier par de triángulos distintos T y T' los números $S(T)$ y $S(T')$ sean diferentes, ¿cuál es la suma mínima posible que pueden tener los once números que pusimos en las regiones?

Nota: Para ver las once regiones interiores es necesario también dibujar las diagonales.

A4. Supongamos que f es una función continua y diferenciable que satisface la condición $f(0) = 1$ y la desigualdad $f'(x) + f(x)e^x + 1 \leq 0$. Muestra que f tiene un cero en el intervalo $[0, \frac{3}{4}]$.

A5. Sea n un entero positivo. En el intervalo $(2^{2n}, 3^{2n})$ se escogen $2^{2n-1} + 1$ números enteros impares. Muestra que podemos escoger dos de ellos x y y tales que x no divide a y^2 y y no divide a x^2.

Examen selectivo A
Soluciones

A1. Para modelar el problema, tomaremos los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ como las paredes. La esfera S tiene centro en $(1, 1, 1)$. La esfera más grande que cabe debe ser tangente a los tres planos y a la esfera de radio 1. Por esta razón, su centro debe estar sobre la recta ℓ definida por $x = y = z$, digamos en (a, a, a), y debe tener radio a.

Para la esfera con centro en (r, r, r) y radio r encontraremos sus intersección ℓ. Son dos puntos de la forma (x, x, x) que cumplen

$$||(r, r, r) - (x, x, x)|| = r,$$

de donde $\sqrt{3}(r - x) = \pm r$. Despejando x obtenemos $x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \cdot r$ o $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \cdot r$. El primer valor corresponde al punto más cercano al origen. Para determinar a y concluir el problema basta igualar el valor inferior de la esfera de radio 1 con el valor superior de la esfera que nos interesa.

La esfera de radio 1 tiene valor inferior $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$. Igualando con el valor superior de la esfera que nos interesa:

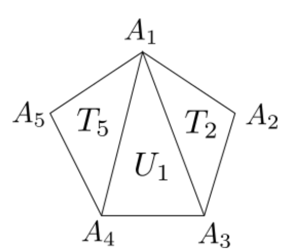
$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$$

De esta forma, el radio que buscamos es $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$. $\square$

A2. Tomemos una sucesión que satisfaga las hipótesis. Fijemos un entero positivo n_1. Notemos que al fijar $n = n_1$ y hacer tender m a infinito en la expresión, el lado derecho se va a cero y por lo tanto la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a x_{n_1}. De manera similar, para otro entero positivo n_2 tenemos que la sucesión converge a x_{n_2}. Como el límite de una sucesión es único, concluimos que $x_{n_1} = x_{n_2}$. De esta forma, cualquier par de elementos de la sucesión es igual y por lo tanto la sucesión es constante.

Ahora, si tomamos una sucesión constante, tenemos que $|x_n - x_m| = 0$ y por lo tanto satisface las hipótesis del problema. Así, las sucesiones que cumplen son las sucesiones constantes. $\square$

A3. Sea R la suma total de las regiones. Mostraremos que el mínimo valor de R es 11.



Primero veremos que todo acomodo válido cumple que $R \geq 11$. Llamemos T_i al triángulo $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y con indices módulo 5). Llamemos U_i al triángulo

$A_{i-2}A_iA_{i+2}$ (de nuevo, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y con índices módulo 5). Notemos que $R = S(T_{i-1}) + S(U_i) + S(T_{i+1})$, pues estos triángulos cubren exactamente a todo el pentágono. Sumando para los cinco valores de i tenemos que:

$$5R = 2\sum_{i=1}^{5} S(T_i) + \sum_{i=1}^{5} S(U_i).$$

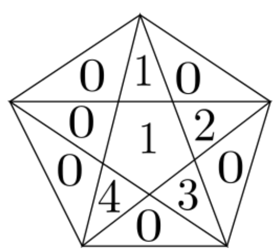
Como las sumas de todos los triángulos son distintas, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{5} (S(T_i) + S(U_i)) \geq 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45,$$
$$\sum_{i=1}^{5} S(T_i) \geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

De este modo,

$$5R = \sum_{i=1}^{5} (S(T_i) + S(U_i)) + \sum_{i=1}^{5} S(T_i) \geq 55$$

y por lo tanto $R \geq 11$. Para terminar, notemos que la figura muestra un acomodo con $R = 11$.



$\square$

A4. Si $f(x) < 0$ para algún $x \in [0, \frac{3}{4}]$, entonces como $f(0) = 1 > 0$, por el teorema del valor intermedio podemos encontrar un cero de f en $[0, \frac{3}{4}]$. Así, podemos suponer que $f(x) > 0$ en todo este intervalo. De esta forma $f'(x) \leq -1 - f(x)e^x < -1$.

Ahora, si hubiera un punto x en el intervalo tal que $f(x) \leq \frac{3}{4} - x$, entonces por el teorema fundamental del cálculo

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = f(x) + \int_x^{\frac{3}{4}} f'(t)\,dt \leq \left(\frac{3}{4} - x\right) + \int_x^{\frac{3}{4}} -1\,dt = 0,$$

contradiciendo que f es positiva. De esta forma, tenemos que $f(x) > \frac{3}{4} - x$ en todo el intervalo. Así, $f'(x) \leq -1 - \left(\frac{3}{4} - x\right)e^x$. Usando esta desigualdad y el teorema fundamental del cálculo

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=f(0)+\int_0^{\frac{3}{4}} f'(t)\,dt \leq 1+\int_0^{\frac{3}{4}} -1-\left(\frac{3}{4}-t\right)e^t\,dt.$$

La integral a la derecha es una integral definida que se resuelve por partes. Su valor es $2-e^{\frac{3}{4}}$. Como $2^4=16<19{,}683=2{,}7^3<e^3$, entonces $f\left(\frac{3}{4}\right)<2-e^{\frac{3}{4}}<0$, una contradicción. $\square$

A5. La idea es que si para cualquier pareja se cumple que $x|y^2$ o bien que $y|x^2$, entonces los números van a ser tan grandes que se saldrán del intervalo deseado. Como herramienta para lograr mostrar esto, usaremos el siguiente lema.

Lema. Supongamos que x y y son enteros positivos impares tales que $x \geq y \geq 2$ y se cumple que $x|y^2$ o bien que $y|x^2$. Entonces $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}+\frac{3}{4}$.

Demostración. Primero supondremos que x divide a y^2. Como x también divide a $2xy$ y a x^2, tenemos que x divide a $(x-y)^2$. Pero como x y y son impares, entonces $x-y$ es par y por lo tanto x divide a $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$. A partir de esta divisibilidad se obtiene la desigualdad

$$x \leq \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \tag{1}$$

de la cual $\sqrt{x} \leq \frac{x-y}{2}$. Manipulando algebraicamente la expresión, tenemos que $y+1 \leq x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}-1)^2$. De esta forma,

$$\sqrt{y}+\frac{3}{4} \leq \sqrt{y+1}+1 \leq \sqrt{x}.$$

Esto es lo que queríamos. Ahora veremos qué sucede si y divide a x^2. De manera similar a como obtuvimos (1), ahora tenemos que

$$y \leq \left(\frac{x-y}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Sacando raiz cuadrada y reacomodando, tenemos que $x \geq y+2\sqrt{y}$. Como $y \geq 2$, tenemos que $2\sqrt{y} \geq \frac{3}{2}\sqrt{y}+\frac{9}{16}$. De esta forma,

$$x \geq y+\frac{3}{2}\sqrt{y}+\frac{9}{16}=\left(\sqrt{y}+\frac{3}{4}\right)^2.$$

Con esto concluimos también en este caso que $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}+\frac{3}{4}$. Esto termina la demostración del lema.

$\square$

Con el lema podemos terminar el problema como sigue. Supongamos que los números que se nos dan en el intervalo son $x_0<x_1<\ldots<x_{2^{2n-1}}$. Procedemos por contradicción. Si nunca

sucede lo que queremos, en particular valores x_i consecutivos tenemos la condición del lema. Entonces podemos probar que $\sqrt{x_1} \geq \sqrt{x_0} + \frac{3}{4}$, y de hecho podemos probar inductivamente que $\sqrt{x_j} \geq \sqrt{x_0} + \frac{3}{4} \cdot j$. De esta manera, tendríamos que:

$$3^{2n} > x_{2^{2n-1}} > \left(\sqrt{x_0} + \frac{3}{4} \cdot 2^{2n-1}\right)^2 > \left(2^n + \frac{3}{4} \cdot 2^{2n-1}\right)^2,$$

sin embargo esta desigualdad es imposible. Sea $A(n)$ el extremo izquierdo y $B(n)$ el extremo derecho. Notemos que para poder encontrar la cantidad de números que se pide, es necesario que $n \geq 2$. Tenemos que $A(2) = 81 < 100 = B(2)$ y que $A(3) = 729 < 1024 = B(3)$. Notemos que $9^4 = 6561 < 8192 = 2 \cdot 16^3$. De esta forma, para $n \geq 4$:

$$A(n) = 9^n < 2 \cdot 16^{n-1} < \frac{9}{16} \cdot 2^{4n-2} < B(n).$$

Esto termina la demostración. $\square$