Matrimonios en gráficas S_λ-estrella libres

Leonardo Martínez, Luis Montejano
leomtz@im.unam.mx, luismontej@gmail.com

Instituto de Matemáticas

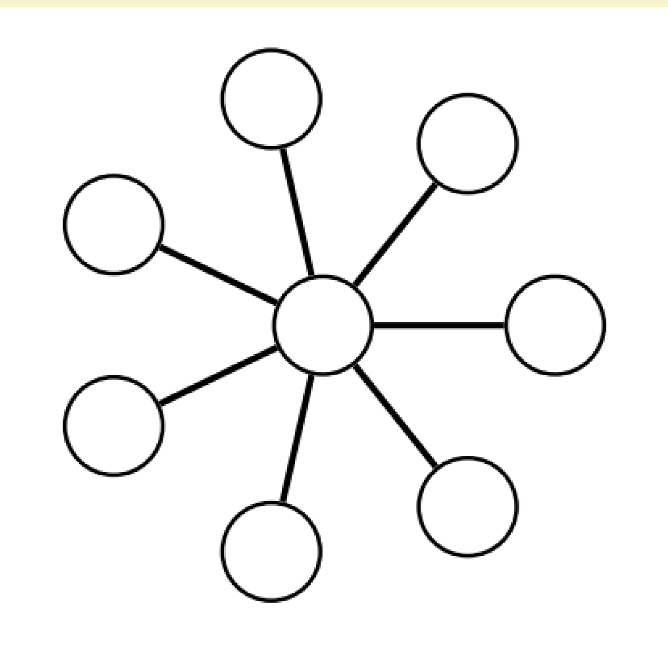
Introducción

Una manera clásica de plantear para una gráfica bipartita el problema de emparejamiento que sature a un lado de la partición es la siguiente. Pensemos que tenemos un grupo de chicos y chicas. A cada chica le gustan algunos chicos. Las chicas de este grupo se quieren casar de modo que cada una se case con un chico que le guste y que a chicas distintas les toquen chicos distintos. ¿Cuándo se puede esto?
El teorema del matrimonio de Hall da una condición necesaria y suficiente: que para cada subconjunto S de chicas en total les gusten al menos $|S|$ chicos [1].
Ahora imaginemos que entre los chicos hay algunos que están peleados. ¿Qué sucede si además de la condición de gustos requerimos que los chicos que queden casados sean amigos entre sí? En este trabajo encontramos una condición tipo Hall para garantizar la existencia de este emparejamiento.

Algunas definiciones

- Un conjunto de vértices es *independiente* si no tienen aristas entre ellos.
- Una gráfica es *bipartita* si sus vértices se pueden dividir en dos conjuntos independientes.
- Al tamaño de un independiente maximal se le llama *número de independencia*.
- La $\mathcal{S}_\lambda$-*estrella* es la gráfica bipartita completa $K_{1,\lambda}$.
- Una gráfica es $\mathcal{S}_\lambda$-*estrella libre* si no tiene a $\mathcal{S}_\lambda$ como subgráfica inducida.

La $\mathcal{S}_7$-estrella



Referencias

[1] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Springer-Verlag, 3rd edition, 2008.

[2] R. Aharoni and P. Haxell. Hall's theorem for hypergraphs. *Journal of Graph Theory*, 35:83–88, 2000.

[3] J. Leech. The problem of the thirteen spheres. *The Mathematical Gazette*, 40:22–23, 1956.

Agradecimientos

Gracias a la Dra. Gaby Araujo por sugerir que este trabajo se presentara como póster durante el Primer Encuentro de Mujeres Matemáticas Mexicanas

Resultado principal

Supongamos que tenemos k chicas. Para plantear el problema de manera un poco más limpia olvidaremos que tenemos una gráfica bipartita y únicamente nos concentraremos en considerar la "gráfica de enemistad" G de los chicos. Dentro de esta gráfica definiremos S_i, $(i = 1, 2, \dots, k)$ como el conjunto de chicos que le gustan a la chica i. Lo que queremos entonces es elegir un elemento de cada S_i de modo que sean distintos y formen un conjunto independiente en G. A un conjunto así le llamamos un independiente *heterocromático*.
El siguiente resultado dice que si G es "bien portada", entonces tenemos un resultado tipo Hall:

Teorema 1. *Si G es $\mathcal{S}_\lambda$-estrella libre y para cada $\beta \subseteq [k]$ la gráfica inducida por $\bigcup_{j\in\beta} S_j$ tiene número de independencia al menos*

$$(|\beta| - 1)(\lambda - 1) + 1,$$

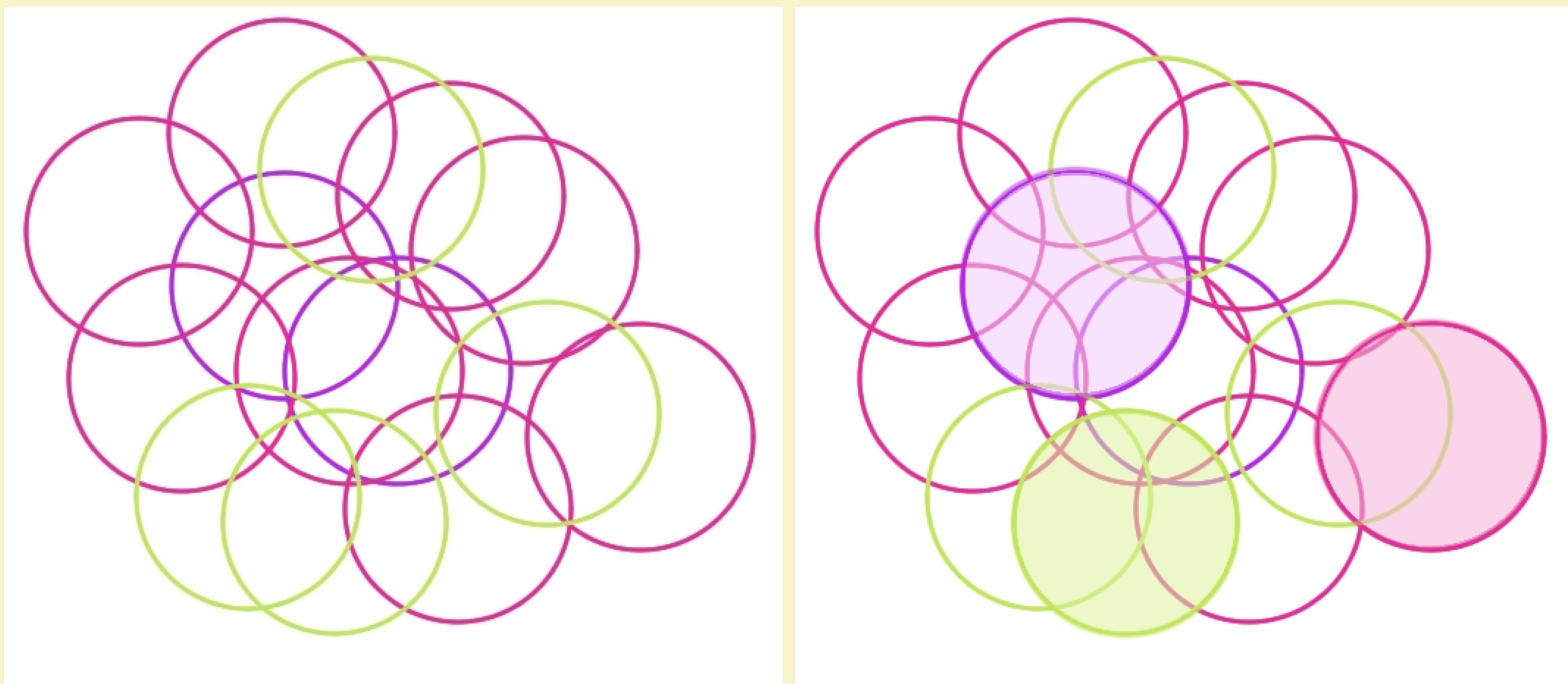
entonces existe un conjunto independiente heterocromático.

La prueba es topológica. Utiliza el lema de Sperner. El esbozo es el siguiente.

1. Se considera el simplejo $k-1$-dimensional Δ_k.
2. Se triangula Δ_k "adecuadamente" lo cual es posible por un resultado de Haxell y Aharoni [2].
3. Se etiqueta de manera especial la triangulación con parejas (i, v) con $v \in S_i$.
4. Se aplica el lema de Sperner en las $i-$coordenadas.
5. El simplejo heterocromático dado por el lema de Sperner corresponde a lo que buscamos.

Un corolario geométrico: Discos unitarios en el plano

El Teorema 1 tiene una variedad de aplicaciones en contextos en los cuales queremos encontrar una colección de objetos heterocromática de modo que además sus elementos satisfagan alguna relación que se verifique de dos en dos elementos.
Un ejemplo interesante de esto es considerar discos unitarios en el plano. Supongamos que tenemos discos de tres colores como en la figura de la izquierda. ¿Qué tenemos que pedir a la cantidad de discos que tenemos de cada color para poder encontrar un conjunto heterocromático de discos ajenos como en la figura de la derecha?



Para resolver el problema con una cantidad arbitraria de colores, consideraremos la gráfica G en donde los vértices son los discos unitarios del plano y dos vértices tienen arista si los discos correspondientes se intersectan. Esta gráfica es S_6-estrella libre, lo cual se puede verificar a través de un argumento geométrico sencillo. A partir de esto, podemos aplicar el Teorema 1 y obtener el siguiente resultado:

Teorema 2. *Supongamos que tenemos discos de n colores, y que cada que tomamos k colores hay $5k-4$ discos ajenos en la unión de esos colores. Entonces hay un conjunto de discos ajenos, uno de cada color.*

El Teorema 2 puede ser generalizado para bolas unitarias en $\mathbb{R}^d$. Consideramos $\kappa(d)$ como el máximo número de $(d-1)$-esferas ajenas en $\mathbb{R}^d$ que pueden ser tangentes a una $d-1$-esfera unitaria fija.

Teorema 3. *Sean k y d enteros positivos y S_1, S_2, ..., S_k algunos conjuntos de bolas unitarias en $\mathbb{R}^d$. Si para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $\kappa(d)(|\beta| - 1) + 1$ bolas disjuntas dos a dos en $\bigcup_{j\in\beta} S_j$ entonces podemos encontrar un conjunto heterocromático de bolas unitarias ajenas.*

A $\kappa(d)$ se le conoce como *kissing number* y ha sido estudiado previamente en la literatura [3].