

Seminario de Resolución de Problemas

Lista 1

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

“Es igual de difícil expresar la belleza de las matemáticas que explicar por qué las estrellas son hermosas.”
Yoko Ogawa

Tarea

1. Se tiene un torneo de tenis con 215 jugadores. Para determinar al ganador habrá varias rondas. En cada ronda pasan aproximadamente la mitad de los jugadores de acuerdo con la siguiente mecánica:

- En la primer ronda, como hay una cantidad impar de jugadores, uno de ellos pasa directamente. Los demás jugadores van a enfrentarse en partidos de 1 contra 1. Como quedan 214 jugadores, se juegan 107 partidos. Con esto pasan 108 jugadores a la siguiente ronda.
- En la segunda ronda, como 108 es par, nadie pasa directamente y se juegan 54 partidos para determinar los 54 jugadores que pasaran a la siguiente ronda.

Se sigue así para determinar un ganador. Hasta el momento se han jugado $107 + 54 = 161$ partidos. ¿Cuántos partidos se jugarán en todo el torneo? ¿Y si fueran 10^{20} jugadores?

2. Si a y b son reales distintos entre sí y distintos de cero que cumplen $\frac{a-2010}{b} + \frac{b+2010}{a} = 2$, ¿cuál es el valor de $a - b$?
- 3.
- ¿En cuántas regiones queda dividido el plano por n rectas, ningunas dos de ellas paralelas y ningunas tres de ellas concurrentes?
 - Es fácil ver que un pastel se puede cortar en 8 pedazos con cuatro cortes rectos (cada corte recto es cortarlo con un plano). ¿Es posible hacerlo con menos cortes?
 - (Extra) ¿Qué tal una dona? ¿Cuál es el máximo número de partes en las que se puede cortar con 3 cortes?, ¿con n cortes?
4. Considera el número $n = 1234567!$. ¿En cuántos ceros termina?
5. En este problema los caballeros siempre dicen la verdad y los bribones siempre mienten.

- Hay dos personas, A y B . A dice “al menos uno de nosotros es bribón”. ¿Qué son A y B ?
 - Ahora A dice “yo soy bribón o B es caballero”. ¿Qué son A y B ?
 - Tenemos tres personas, A , B y C . A dice “todos nosotros somos bribones”. B dice “exactamente uno de nosotros es bribón. ¿Qué son A , B y C ?
 - Ahora hay un tercer tipo de persona, la normal, que a veces miente y a veces dice la verdad. A dice “soy normal”. B dice “eso es cierto”. C dice “yo no soy normal”. Exactamente en estas personas hay un caballero, un bribón y un normal. ¿Qué son A , B y C ?
6. Sin usar cálculo, encuentra el valor mínimo de $x + \frac{1}{x}$ para $x > 0$. ¿Qué tal el valor mínimo de $x + \frac{3}{x}$?
 7. ¿Qué enteros positivos se pueden poner como la suma de dos o más enteros positivos consecutivos?
 8.
 - Encuentra el valor máximo de $x^{\frac{1}{x}}$.
 - Sin hacer cuentas numéricas, determina cuál de π^e y e^π es más grande.
 9. Un *punto latiz* en el plano es un punto con ambas coordenadas enteras. Muestra que no se puede hacer un triángulo equilátero con sus tres vértices puntos latices.
 10. Muestra que ningún conjunto de 9 enteros consecutivos tiene un subconjunto cuyo producto de elementos es igual al producto de los elementos de su complemento.
 11. En el *juego de Wythoff* dos personas, A y B , juegan a tomar fichas de dos montones, inicialmente uno de tamaño x y otro de tamaño y . En cada turno se puede tomar cualquier número de fichas de un montón o tomar la misma cantidad de fichas de ambos montones. El ganador es quien toma la última ficha.
Empezando con valores pequeños para x y y , trata de conjeturar qué posiciones son perdedoras hasta que encuentres una regla recursiva. Intenta encontrar una expresión “cerrada” para estas posiciones.
 12. * Si $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \neq 2$, determina todos los números reales x, y, z tales que:

$$(1 + 2a^2)x^2 + (1 + 2b^2)y^2 + (1 + 2c^2)z^2 + 2xy(ab - a - b) + 2yz(bc - b - c) + 2zx(ca - c - a) = 0$$