Proceso Selectivo para la XXIII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2016

- Primer examen selectivo: 12 de marzo
- Segundo examen selectivo: 2 de abril
- Tercer examen selectivo: 16 de abril
- Cuarto examen selectivo: 30 de abril
- Resultados finales: 4 de mayo
- XXII IMC: 25 al 31 de julio

Examen selectivo D

Creo que los matemáticos deben trabajar en aquellas cosas que realmente les gusten y disfruten, y no sólo intentar elegir un tema por tener la impresión de que está de moda, y que como está de moda les pueda hacer ganar un gran premio.
Martin Hairer, Medalla Fields 2014

D1. Un conjunto de torres en un tablero de $n \times n$ (con $n > 1$) es *preciso* si en cualquier fila y en cualquier columna hay al menos una torre y además, si se remueve cualquier torre queda alguna fila o columna sin ninguna torre. ¿Cuál es la máxima cantidad de torres que puede tener un conjunto *preciso*?

D2. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa, tal que

$$f(t)^2 \leq 1 + 2\int_0^t f(s)ds \quad \forall\, t \in [0, \infty).$$

Demuestra que $f(t) \leq 1 + t$ para todo $t \in [0, \infty)$.

D3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función continua e inyectiva. Supongamos que para cualquier recta $l \subset \mathbb{R}^2$, la imagen $f(l)$ también es una recta. Demuestra que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^2$, se cumple la igualdad

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

D4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $p > 0$. Muestra que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p+1}} < \frac{p+1}{p} n^{\frac{p}{p+1}}.$$

D5. Sea A una matriz de $n \times n$. Supongamos que las entradas de la matriz están formadas por los números del 1 al n de la siguiente manera:

(1) En cada renglón y en cada columna aparecen todos los números del 1 al n exactamente una vez.

(2) Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $a_{ii} = 1$ y $a_{1i} = i = a_{i1}$.

(3) Si la entrada $a_{ij} = a_{kl}$, entonces $a_{kj} = a_{il}$, para todo $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

Demuestra lo siguiente:

a) La matriz es la tabla de multiplicar de un grupo abeliano cuyos elementos son $\{1, \ldots, n\}$.

b) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2^m$.