Proceso Selectivo para la XXIII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2016

- Primer examen selectivo: 12 de marzo
- Segundo examen selectivo: 2 de abril
- Tercer examen selectivo: 16 de abril
- Cuarto examen selectivo: 30 de abril
- Resultados finales: 4 de mayo
- XXIII IMC: 25 al 31 de julio

Examen selectivo D

Creo que los matemáticos deben trabajar en aquellas cosas que realmente les gusten y disfruten, y no sólo intentar elegir un tema por tener la impresión de que está de moda, y que como está de moda les pueda hacer ganar un gran premio.

Martin Hairer, Medalla Fields 2014

D1. Un conjunto de torres en un tablero de $n \times n$ (con $n > 1$) es *preciso* si en cualquier fila y en cualquier columna hay al menos una torre y además, si se remueve cualquier torre queda alguna fila o columna sin ninguna torre. ¿Cuál es la máxima cantidad de torres que puede tener un conjunto *preciso*?

D2. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa, tal que

$$f(t)^2 \leq 1 + 2\int_0^t f(s)ds \quad \forall\, t \in [0, \infty).$$

Demuestra que $f(t) \leq 1 + t$ para todo $t \in [0, \infty)$.

D3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función continua e inyectiva. Supongamos que para cualquier recta $l \subset \mathbb{R}^2$, la imagen $f(l)$ también es una recta. Demuestra que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^2$, se cumple la igualdad

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

D4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $p > 0$. Muestra que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p+1}} < \frac{p+1}{p} n^{\frac{p}{p+1}}.$$

D5. Sea A una matriz de $n \times n$. Supongamos que las entradas de la matriz están formadas por los números del 1 al n de la siguiente manera:

(1) En cada renglón y en cada columna aparecen todos los números del 1 al n exactamente una vez.

(2) Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $a_{ii} = 1$ y $a_{1i} = i = a_{i1}$.

(3) Si la entrada $a_{ij} = a_{kl}$, entonces $a_{kj} = a_{il}$, para todo $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

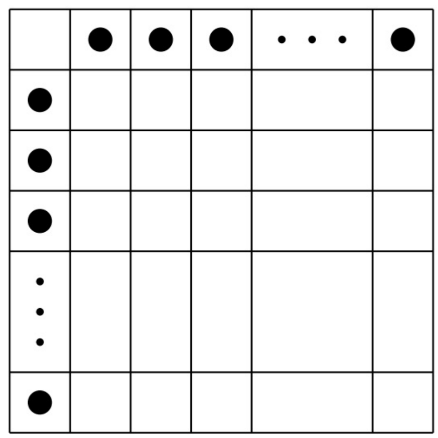
Demuestra lo siguiente:

a) La matriz es la tabla de multiplicar de un grupo abeliano cuyos elementos son $\{1, \ldots, n\}$.

b) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2^m$.

Examen selectivo D
Soluciones

D1. Veamos que hay un conjunto preciso de $2n-2$ torres de la siguiente manera:



Demostremos que no es posible tener más de $2n-2$ torres en un conjunto preciso, en cuyo caso la respuesta sería $2n-2$.

Supongamos que hay un conjunto preciso con al menos $2n-1$ torres. Por ser preciso cada torre puede asociarse a una fila o columna de manera que esa torre es la unica en la fila o columna (es posible que a una torre se le asocie a la fila y la columna en la que se encuentra), luego por casillas hay al menos n torres que se asociaron a filas (o columnas), sin perdida de generalidad digamos que fue a las filas. Esto implica que en cada una de las n filas hay una torre única por lo tanto hay n torres exactamente, sin embargo supusimos que había al menos $2n-1$ torres, esto implica que $n-1=0$ lo cual es absurdo pues $n>1$. Luego, no es posible que exista un conjunto preciso con más de $2n-2$ torres. $\square$

D2. Para cada $x \in [0,\infty)$, definamos $F(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)dt$. Por el teorema fundamental del cálculo F es derivable y

$$F'(x) = 2f(x) \geq 0.$$

Luego F es no decreciente y por lo tanto $F(x) \geq F(0) = 1$ para todo $x \in [0,\infty)$. Además, de la desigualdad original deducimos que $f(x) \leq \sqrt{F(x)}$ y por lo tanto $F'(x) = 2f(x) \leq 2\sqrt{F(x)}$. Esta última desigualdad implica que

$$\frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}} \leq 1,$$

lo cual nos permite hacer la siguiente estimación:

$$f(x) - 1 \leq \sqrt{F(x)} - \sqrt{F(0)} = \int_0^x \frac{F'(t)}{2\sqrt{F(t)}}dt \leq \int_0^x dt = x.$$

Despejando $f(x)$ en la desigualdad anterior llegamos a $f(x) \leq 1+x$, como se quería demostrar. $\square$

D3. Comencemos haciendo las siguientes observaciones:

a) Como la función es continua y manda rectas en rectas, también manda segmentos en segmentos. Más aún, dados $a, b \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

b) Como la función es inyectiva, las imágenes de dos rectas paralelas también son dos rectas paralelas.

c) Si l y j son dos rectas que se cortan en un punto x, entonces las imágenes de l y j son dos rectas que se cortan en el punto $f(x)$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}^2$ y sea $\omega = \frac{a+b}{2}$. Llamemos l a la recta determinada por a y b y consideremos un punto c fuera de ella. Sean x y y puntos en los segmentos $[a, c]$ y $[b, c]$, respectivamente, tales que la recta j determinada por $[x, y]$ sea paralela a l. Por el teorema de Ceva, los segmentos $[x, b]$, $[a, y]$ y $[c, \omega]$ concurren en un punto p.

Por las observaciones anteriores tenemos que la imagen del triángulo determinado por los puntos a, b y c es un triángulo con vértices $f(a)$, $f(b)$ y $f(c)$. Además, los puntos $f(\omega), f(x)$ y $f(y)$ están dentro de los segmentos $[f(a), f(b)]$, $[f(c), f(a)]$ y $[f(c), f(b)]$, respectivamente y satisfacen las siguientes dos condiciones:

- $[f(x), f(y)]$ es paralelo a $[f(a), f(b)]$,
- Los segmentos $[f(x), f(b)]$, $[f(y), f(a)]$ y $[f(\omega), f(c)]$ concurren en el punto $f(p)$.

Utilizando estas dos condiciones en combinación con el teorema de Ceva, deducimos que $f(\omega)$ es el punto medio del segmento $[f(a), f(b)]$, lo cual demuestra que

$$f(\omega) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

□

D4. Haremos la demostración por inducción.

Si $n = 1$, entonces al ser p positivo es evidente que $\frac{p+1}{p} > 1$.

Supongamos que el resultado es cierto para n y demostremos que también es cierto para $n+1$. Así,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p+1}} < \frac{p+1}{p} n^{\frac{p}{p+1}} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

de modo que, el resultado será sierto si logramos demostrar que

$$\frac{p+1}{p} n^{\frac{p}{p+1}} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} < \frac{p+1}{p}(n+1)^{\frac{p}{p+1}}$$

lo cual es equivalentemente a demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{p}{p+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} < \left((n+1)^{\frac{p}{p+1}} - n^{\frac{p}{p+1}}\right). \qquad (1)$$

Para ello consideremos la función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{\frac{p}{p+1}}$. Por el teorema del valor medio, podemos encontrar un punto $\xi \in (n, n+1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\left((n+1)^{\frac{p}{p+1}} - n^{\frac{p}{p+1}}\right) &= f(n+1) - f(n) \\
&= \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} \\
&= f'(\xi) = \frac{p}{p+1}\xi^{\frac{-1}{p+1}} \\
&= \frac{p}{p+1}\left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{p+1}}.
\end{aligned}$$

Como $\xi < n+1$, también tenemos que $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{n+1}$ y por lo tanto

$$\frac{p}{p+1}\left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{p+1}} > \frac{p}{p+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Esta última desigualdad completa la prueba.

□

D5. a) Para que sea más clara la notación, la entrada a_{ij} de la matriz la denotaremos por $a(i,j)$. Definamos la operación $* : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ de la siguiente manera:

$$i * j = a(i,j), \quad \text{para cualesquiera } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Es evidente que la matriz del problema es la tabla de multiplicar de esta operación. Además, se sigue de la propiedad (2) que 1 es el elemento neutro y que todo elemento es su propio inverso. Por otro lado, como $a(i,i) = 1 = a(j,j)$, de la propiedad (3) inferimos que $a(i,j) = a(j,i)$ (es decir, la matriz es simétrica) y por lo tanto

$$i * j = a(i,j) = a(j,i) = j * i.$$

Esto garantiza que la operación es conmutativa. Para terminar la parte a) del problema debemos demostrar que la operación es asociativa. Observemos que dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$a(1, j*i) = 1 * (j * i) = j * i = i * j = a(i,j).$$

Usando la propiedad (3) de la matriz, concluimos que $a(i, j*i) = a(1,j)$ y por lo tanto

$$i * (j * i) = 1 * j = j.$$

Ahora consideremos tres elementos $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Utilizando la igualdad anterior (y el hecho de que la operación es conmutativa) podemos deducir que

$$a(i*k, i) = (i*k)*i = k = (j*k)*j = a(j*k, j).$$

Por la propiedad (3) de la matriz, lo anterior garantiza que $a(j*k, i) = a(i*k, j)$ y por lo tanto

$$(j*k)*i = (i*k)*j = j*(i*k) = j*(k*i).$$

Esto demuestra que la operación es asosiativa y por lo tanto $(\{1, \ldots, n\}, *, 1)$ es un grupo conmutativo.

b) Para demostrar que n es de la forma 2^m, supongamos que existe un primo impar p que divide a n. Por el teorema de Cauchy para grupos sabemos que debe existir un elemento j en el grupo de orden p, pero esto es imposible ya que todos los elementos del grupo tienen orden 2.

Otra forma de demostrar esta parte es la siguiente: consideremos el campo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Es rutina demostrar que la operación $\cdot : \mathbb{Z}_2 \times \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ dada por

$$0 \cdot i = 1, \quad \text{para todo } i \in \{1, \ldots, n\},$$
$$1 \cdot i = i, \quad \text{para todo } i \in \{1, \ldots, n\},$$

hace del grupo abeliano $(\{1, \ldots, n\}, *)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$. Si llamamos m a la dimensión de dicho espacio vectorial podemos concluir que la cardinalidad del espacio es 2^m y por lo tanto $2^m = n$. $\square$