Proceso Selectivo para la XXIII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2016

- Primer examen selectivo: 12 de marzo
- Segundo examen selectivo: 2 de abril
- Tercer examen selectivo: 16 de abril
- Cuarto examen selectivo: 30 de abril
- Resultados finales: 4 de mayo
- XXII IMC: 25 al 31 de julio

Examen selectivo C

Pienso que las razones para hacer matemáticas son similares a aquellas para hacer música o arte. Se trata de contribuir a un cierto entendimiento del mundo y de nosotros.
Manjul Bhargava, Medalla Fields 2014

C1. Determina todas las funciones periódicas continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no tengan un periodo mínimo.

Nota: Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica es una función para la cual existe un real $c \neq 0$ para el cual $f(x+c) = f(x)$ para todo real x. El *periodo mínimo* es el menor real $c \neq 0$ para el cual sucede lo anterior.

C2. Sean A y B matrices de 2×2 con entradas reales. Supongamos que existe $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ no constante tal que $p(AB) = p(BA)$. Demuestra que $AB = BA$ o que $p(AB) = \lambda I_2$ para algún real λ.

C3. Dados dos reales $a, b > 0$, consideremos la región del plano

$$R = \left\{ (x,y) : |x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{b}{2} \right\}.$$

Llamemos p_1, p_2, p_3 y p_4 a los vértices del rectángulo que es frontera de R. Sea $f : R \to \mathbb{R}$ la función

$$f(p) = \sum_{i=1}^{4} ||p - p_i||.$$

Determina el rango de f.

C4. Supongamos que están dados n puntos en una recta de tal forma que todo $r > 0$ es la distancia de a lo más dos pares de estos puntos. Demuestra que hay al menos $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ reales positivos distintos que son la distancia de exactamente una pareja de estos puntos.

C5. Encuentra todos los enteros positivos m y n tales que

$$13^m + 3 = n^2.$$