

# Proceso Selectivo para la XXIII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM  
Instituto de Matemáticas UNAM  
SUMEM

## **Indicaciones**

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

## **Cronograma 2016**

- Primer examen selectivo: 12 de marzo
- Segundo examen selectivo: 2 de abril
- Tercer examen selectivo: 16 de abril
- Cuarto examen selectivo: 30 de abril
- Resultados finales: 4 de mayo
- XXIII IMC: 25 al 31 de julio

## Examen selectivo A

*Me gusta cruzar las fronteras imaginarias que la gente establece entre diferentes áreas, es muy refrescante. Hay montones de herramientas y no sabes cuál de ellas funcionará. Se trata de ser optimista y de intentar conectar cosas.*

Maryam Mirzakhani, Medalla Fields 2014

- A1. Para un entero positivo  $n$  consideramos un tablero de  $n \times n$ . Una *semitorre* es una pieza que se pone en una casilla del tablero apuntando hacia una (y sólo una) de las direcciones arriba, abajo, derecha o izquierda.

¿Cuál es el máximo número de semitorres que se pueden poner de modo que no haya dos de ellas  $A$  y  $B$  tales que  $A$  apunte a  $B$ ?

**Nota:** Las semitorres pueden tener direcciones distintas. A lo más se puede colocar una semitorre en cada casilla. Una semitorre que apunte a la derecha, apunta hacia las casillas en su misma fila y que queden a la derecha. De manera similar se define a cuáles casillas apuntan las semitorres que apuntan hacia la izquierda, arriba o abajo.

- A2. Encuentra el área de la región definida por  $x^2 + y^2 \leq |x| + |y|$ .

- A3. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Supongamos que para cada  $x \in \mathbb{R}$  algún término de la sucesión

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$$

es igual a 1. Muestra que  $f(1) = 1$ .

- A4. Sean  $A$  y  $B$  matrices de  $2017 \times 2017$ . Muestra que existen números reales  $a$  y  $b$  no ambos cero para los cuales la matriz  $aA + bB$  no es invertible.

- A5. Sea  $a(n)$  el mayor factor primo del entero positivo  $n$ . Muestra que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na(n)}$$

es convergente.