Proceso Selectivo para la XXI IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM

Primer examen selectivo y soluciones

1A) Muestra que el número $111\ldots11$ que consiste de 1977 unos no puede tener 365 divisores positivos distintos.

1B) ¿Cuál es la máxima área que pueden cubrir dos círculos que no se enciman y que están dentro de un cuadrado de lado 1?

1C) Se toman 2014 puntos en posición general en el plano (no hay tres colineales). Se trazan todos los segmentos entre ellos. Muestra que alguna de las siguientes afirmaciones es cierta:

- Se puede llegar de cualquier punto a cualquier otro usando únicamente segmentos de longitud racional.
- Se puede llegar de cualquier punto a cualquier otro usando únicamente segmentos de longitud irracional.

1D) La matriz A es de 10×10 y las entradas están dadas como sigue:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 1 \text{ para } i = 1, \ldots, 10 \\ a_{i(i+1)} &= 1 \text{ para } i = 1, \ldots, 9 \\ a_{i(i-1)} &= -1 \text{ para } i = 2, \ldots, 10 \end{aligned}$$

El resto de las entradas es 0. Encuentra el determinante de A.

1E) Muestra que para todo real $p \geq 1$ se satisface que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} < p.$$

Soluciones

1A) Un número puede tener una cantidad impar de divisores únicamente si es un cuadrado perfecto. Esto se debe a que si no es un cuadrado perfecto, entonces se pueden agrupar a los divisores de n en parejas $\{d, \frac{n}{d}$, dando una cantidad par de divisores. Por otro lado, elevando los resíduos 0, 1, 2, 3 módulo 4 al cuadrado obtenemos respectivamente $0, 1, 0, 1$. De esta forma, ningún número congruente con 3 módulo 4 puede ser cuadrado perfecto.

Como el número $111\ldots11$ del problema es de la forma $100k + 11$, entonces es congruente a 3 módulo 4. De esta forma, no es cuadrado y por tanto no puede tener 365 divisores.

1B) Llamemos a los círculos C_1, C_2 y a sus radios r_1, r_2 respectivamente.

Lema Podemos suponer que C_1 y C_2 tocan dos lados del cuadrado y son tangentes entre sí.

Demostración. Consideremos las cuatro direcciones N, S, E, O. El círculo C_1 puede bloquear a C_2 únicamente en una de las direcciones $\{N, S\}$ y en una de las direcciones $\{E, O\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que lo bloquea en N y en O. Entonces podemos mover C_2 hacia abajo y hacia la derecha para que toque en dos lados al cuadrado. Luego dejando C_2 tangente a estos lados, lo agrandamos hasta que sea tangente a C_1. Este acomodo cubre más área que antes.

Una vez hecho esto, podemos mover C_1 a la izquierda y hacia arriba para que sea tangente a dos lados del cuadrado y agrandarlo hasta que sea tangente a C_2. De nuevo este acomodo cubre más área que antes.

□

Esto muestra que los centros de la circunferencia están sobre una diagonal. Notemos que la diagonal está formada por r_1, r_2 y dos segmentos que por el teorema de Pitágoras miden $\sqrt{2}r_1$ y $\sqrt{2}r_2$. De esta forma, maximizar el área equivale a maximizar $f(r_1, r_2) = r_1^2 + r_2^2$ bajo las restricciónes $r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ y $r_1, r_2 \in [0, \frac{1}{2}]$.

Al despejar r_2 y subsitituir en f nos queda una cuadrática en r_1 con coeficiente principal positivo, de modo que su máximo se alcanza en uno de los extremos del intervalo. Claramente $r_1 = 0$ no es bueno pues dado un círculo en un cuadrado siempre podemos poner otro. Entonces el máximo se alcanza en $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

Realizando las operaciones, el máximo es $\pi\left(\frac{18-12\sqrt{2}}{4}\right) = \pi\left(\frac{9-6\sqrt{2}}{2}\right)$.

1C) Mostraremos que la afirmación es más general y se cumple para n puntos en posición general. Procederemos por inducción. Para uno y dos puntos el enunciado es cierto.

Supongamos que se cumple para cualesquiera n puntos y tomemos $n+1$ puntos. Supondremos sin pérdida de generalidad que al quitar uno de los puntos p entonces en los n restantes se puede llegar de cualquier punto a cualquier punto usando sólo segmentos de longitud racional (el otro caso es análogo).

Si p tiene algún segmento racional hacia los n puntos, entonces se puede llegar de él a cualquier otro sólo con segmentos racionales y por tanto los $n + 1$ puntos están "conectados racionalmente".

Si todos los segmentos de p hacia los n puntos son irracionales, entonces de cualquier punto se puede pasar por p para llegar a cualquier otro y sólo usar segmentos irracionales. Esto completa los casos y por tanto completa la inducción. El problema es el caso particular $n = 2014$.

1D) Llamemos A_n a la matriz de $n \times n$ que tiene unos en la diagonal principal, unos en la diagonal justo arriba de la principal menos unos en la diagonal justo abajo de la principal y ceros en lo demás, y a_n a su determinante. El problema pide encontrar a_{10}.

Observemos que $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. Si tomamos una $n \geq 3$ y hacemos el determinante por menores en la primer fila, tenemos que $a_n = a_{n-1} - \det(B_{n-1})$ donde B_{n-1} es el menor correspondiente. Pero desarrollando ahora en la primer columna tenemos que $\det(B_{n-1}) = -a_{n-2}$.

De esta forma, se cumple la relación recursiva $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ y por tanto: $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$ y finalmente $a_{10} = 89$.

1E) Fijemos una n entera mayor o igual a 1. Notemos que

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} = n^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} \right)^p - \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right)^p \right).$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio[1] a la función $f(x) = x^p$, tenemos que existe una $z \in [0,1]$ tal que:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} \right)^p - \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right)^p \right) = \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right) p \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+z}} \right)^{p-1}$$

Como $n^{\frac{p-1}{p}} < (n+z)^{\frac{p-1}{p}}$, entonces juntando las expresiones anteriores tenemos que:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} < p \left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}} \right).$$

Sumando sobre todos los valores de n, a la derecha tenemos una suma telescópica de suma p, obteniendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}} < p,$$

la desigualdad deseada.

[1] El TVM en realidad da una $c \in [\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}, \frac{1}{\sqrt[p]{n}}]$ tal que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Pero como la función $g(x) = \frac{1}{\sqrt[p]{n+x}}$ es monóntona, podemos tomar la z como se indica.