

VI Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2016

Primera Etapa

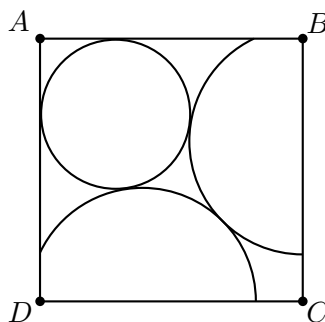
Sábado 14 de mayo de 2016

Bienvenido a la Primera Etapa del VI Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether

- Resuelve el examen en la hoja de respuestas anexa. Cada respuesta correcta vale un punto.
- Tienes 3 horas para resolver el examen.
- Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.
- No se puede comentar ni difundir el examen hasta el 15 de mayo.

1. En la siguiente figura el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado, los arcos de circunferencias tienen radio 3 y centros sobre los lados BC y CD , la circunferencia tiene radio 2 y las circunferencias son tangentes. ¿Cuál es la longitud de AC ?

- (a) $2\sqrt{2} + 9$ (b) $2\sqrt{2} + 7$ (c) $3\sqrt{3} + 5$ (d) $4\sqrt{3} + 4$



2. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $3^{2016^{2016}}$?

- (a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) 9

3. 100 gatos negros y 100 gatos blancos asisten a una fiesta que comienza a las 00:00 horas. Se sabe que cada hora salen 10 gatos negros y entra 1 blanco empezando a las 00:30 y cada hora salen 10 gatos blancos y entran 2 negros comenzando a la 1:00. Esto sucede siempre y cuando haya suficientes gatos en la fiesta. ¿Cuál es la última hora en la que aun salieron gatos?

- (a) 10:30 (b) 11:00 (c) 11:30 (d) 12:00

13. Un par de elementos $x, y \in A$ en un anillo $(A, +, \cdot)$ no conmutativo satisfacen las relaciones $xy = 1$ y $yx = 1$. Además, $1 \neq -1$. Si $x + 1$ y $y + 1$ son invertibles, calcula el valor de $(x + 1)^{-1} + (y + 1)^{-1}$.
- (a) -1 (b) x (c) y (d) 1

14. El conjunto de los x para los cuales está definida la expresión

$$\log_{2016}(\log_{2015}(\log_{2014}(\log_{2013} x)))$$

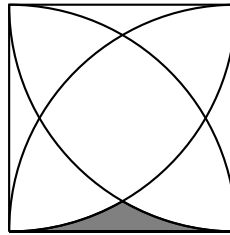
está escrito de la forma $\{x \mid x > c\}$ para alguna c . ¿Cuál es el valor de c ?

- (a) 0 (b) 2015 (c) 2013^{2014} (d) $2014^{2015^{2016}}$
15. Un polinomio con coeficientes reales

$$c_{2016}x^{2016} + c_{2015}x^{2015} + \cdots + c_1x + c_0$$

cumple que sus raíces en los complejos son todas distintas y una de ellas es 0 , además si las raíces son $z_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2, \dots, 2016$ y $\sum_{j=1}^{2016} a_j = \sum_{j=1}^{2016} b_j$. ¿Cuál de los siguientes números puede ser distinto de cero?

- (a) c_0 (b) c_{2015} (c) $\sum_{j=1}^{2016} a_j$ (d) $\sum_{j=1}^{2016} c_j$
16. En la siguiente figura el cuadrado tiene lado 1 y cada arco de circunferencia también tiene radio 1 . ¿Cuál es el área de la región sombreada?



- (a) $\frac{4-\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{4-\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{9-\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{9-\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{2}$
17. Considera el conjunto \mathbb{Z}^2 de todas las parejas $(n, m) \in \mathbb{R}^2$ con n y m números enteros. Dos puntos u y v en \mathbb{Z}^2 son *vecinos* si existe $w \in \mathbb{Z}^2$ tal que $\|u - w\| = \|v - w\|$. ¿Cuál de las siguientes parejas cumple que comenzando en ella hay una sucesión de vecinos que llegue a $(0, 0)$?
- (a) $(2016, 2015)$ (b) $(2015, 2016)$ (c) $(2017, 2016)$ (d) $(2014, 2016)$
18. Sea $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3 - x_4, \dots, x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n}, 0).$$

¿Cuál es la dimensión de la imagen?

- (a) 1 (b) $2n$ (c) $2n - 1$ (d) n

19. Sea G un grupo con 2065 elementos, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa sin importar la elección de G ?
- (a) G es conmutativo (b) G contiene un subgrupo con 35 elementos (c) G tiene exactamente 6 subgrupos (d) G es cíclico
20. Cuatro puntos son los vértices de un rectángulo y se dibujan siete puntos en el interior de ese rectángulo. De estos 11 puntos no hay tres de ellos que sean colineales. Cinco hermanos deciden jugar el siguiente juego. Por orden de edad, de menor a mayor, cada hermano trazará el segmento que une dos puntos del rectángulo respetando las siguientes reglas: no se puede trazar dos veces un mismo segmento y dos segmentos no pueden cortarse en su interior. El ganador es el hermano que dibuja el último segmento posible. ¿Quién ganará?
- Nota:** Los lados del rectángulo no están dibujados al inicio.
- (a) El mayor (b) El menor (c) No hay estrategia ganadora (d) El de en medio
21. Sea $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$ el conjunto de enteros positivos no divisibles entre 3. Un número n impar cumple que la suma de $2n$ términos consecutivos de M es 300. ¿Cuáles son los posibles valores de n ?
- (a) 1 y 7 (b) 3 y 7 (c) 3 y 5 (d) 1 y 5
22. ¿Cuántos números irracionales x existen tales que $x^2 + 2x$ y $x^3 - 6x$ sean números racionales?
- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3
23. ¿Cuál es el valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 \cdot n} + \sqrt{2 \cdot n} + \sqrt{3 \cdot n} + \dots + \sqrt{n \cdot n}}{n^2}$?
- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2
24. Aplicar un paso a una n -ada de números reales (a_1, a_2, \dots, a_n) consiste en tomar dos de los números y reemplazar las entradas correspondientes por el producto de ellos. Decimos que n es *equilibrado* si después de una cantidad finita de pasos se puede obtener una n -ada con todos los números iguales, independientemente de los números iniciales. ¿Cuál de las siguientes es una lista de números equilibrados?
- (a) 2, 3, 4 (b) 2, 3, 5 (c) 2, 5, 7 (d) 2, 4, 8
25. Cuatro matrimonios se juntan para jugar ajedrez una ronda de ajedrez. Cada una de las 8 personas juega exactamente una vez. Se sabe que Beatriz jugó con Eduardo, Alicia jugó contra el esposo de Clara, Félix jugó contra la mujer de Gustavo, Daniela jugó contra el marido de Alicia y Gustavo jugó contra la esposa de Eduardo. ¿Quién jugó contra Félix?
- (a) Alicia (b) Beatriz (c) Clara (d) Daniela