Entrenamiento Concurso Galois-Noether
Lista 3

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

1. Heurísticas, Parte 3

Contradicción Esta técnica consiste en proponer lo que se quiere demostrar como falso. Si a partir de ahí llegamos a la contradicción de algo que realmente sabemos que es verdadero, entonces no es posible que lo que queremos sea falso. Esta técnica resulta útil cuando suponer que lo que queremos es falso nos da mucha información.

Casos extremos A veces resulta útil suponer que tenemos un caso extremo en un problema. Muchas veces las configuraciones extremas de un problema tienen propiedades interesantes que podemos aprovechar.

Generalizar Hay algunos problemas que se vuelven más fáciles cuando intentamos probar algo más general. Esto se puede deber a que ya tenemos herramientas para trabajar con el caso en general. Por ejemplo, puede ser que una afirmación para *un* entero sea más fácil de probar para *todos* los enteros, pues podemos usar inducción, o que una serie sea más fácil de probar si ponemos una variable adicional, pues podemos derivar y usar cálculo.

1.1. Problemas de Calentamiento

1. Muestra que no existe un número natural "más grande".

2. Se tienen 3 números a_1, b_1 y c_1 positivos. Para cada $n \geq 0$ se definen a_{n+1}, b_{n+1} y c_{n+1} como $|a_n - b_n|$, $|b_n - c_n|$ y $|c_n - a_n|$. Muestra que existe una N tal que si $n \geq N$, entonces el conjunto $\{a_n, b_n, c_n\}$ permanece constante.

   Sugerencia: Ve cómo se comporta el número más grande en cada paso.

3. Muestra que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{25} - \frac{1}{26} = \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{26}$.

1.2. Problemas

1. El maestro pidió a sus alumnos que encontraran las raíces de un polinomio cuadrático mónico con raíces reales. Juan copió mal el coeficiente libre y obtuvo como raíces a los reales $a > 1$ y $b > 1$. Pedro copió mal el coeficiente de x y obtuvo como raíces a a^2 y b^2. Muestra que alguno de los dos, además de copiar mal la ecuación, resolvió mal la ecuación que copió.

2. Muestra que hay una infinidad de primos de la forma $4k + 3$.

   Sugerencia Supón que hay sólo una cantidad finita, y que son $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Considera el número $4p_1p_2 \ldots p_n + 3$ y justifica por qué tiene que tener un divisor primo de la forma $4k + 3$ distinto a todos los demás.

3. Se tiene una cantidad finita de puntos distintos en el plano. ¿Será posible que cada punto sea el punto medio de otros dos?

4. Muestra que cualquier polígono convexo de área 1 se puede meter en un rectángulo de área 2.

5. Dados n puntos en el plano, muestra que hay tres de ellos que determinan un ángulo menor o igual a $\frac{\pi}{n}$.

6. Encuentra el valor de $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots$.

   Sugerencia Considera $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \ldots$ y $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$. Prueba primero que $g(x) = \frac{1}{1-x}$ cuando $|x| < 1$. Observa que el problema pide $f(\frac{1}{2})$. Observa además que $f(x) = xg'(x)$.

1.3. Tarea

1. Muestra que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ es un número irracional.

   Sugerencia Supongamos que $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ es un número racional. Eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad $r - \sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$?

2. Se tienen n puntos en el plano, de modo que cualesquiera 3 los puedes meter en un triángulo de área 1. Muestra que todos los puntos los puedes meter en un triángulo de área 4.

   Sugerencia Considera, entre todos los puntos, aquellos tres que determinen el triángulo de área más grande. Traza paralelas a los lados de este triángulo por sus vértices e intenta demostrar que todos los puntos están en este triángulo más grande.

3. ¿Cuál de los siguientes números es más grande? ¿$\sqrt[3]{60}$ ó $2 + \sqrt[3]{7}$?

   Sugerencia Considera el problema para los números $\sqrt[3]{4(x+y)}$ y $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$.

4. **Problema de exploración** Decimos que un número es "cool" si es de la forma $n(n+1)$ con n un entero positivo. Los números cool más pequeños son $2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, \ldots$.

   - Observa que 6 y 12 son cool consecutivos, pues no hay ningún otro número cool entre ellos. Resulta que su producto, 72, también. Observa que 20 y 30 son cool consecutivos, y su producto $600 = 24 \cdot 25$ también. ¿Será cierto que $110 \cdot 132$ es cool?
   - Muestra que el producto de dos números cool consecutivos es cool.
   - Ahora queremos ver cuántas ternas (a, b, c) de números cool cumplen que $c = ab$. Más específicamente, queremos ver para cada valor de a, cuántas b hacen que ab sea cool.
   - Finalmente, queremos encontrar algunas ternas de soluciones relacionadas. Por ejemplo, notemos que $(14\times15, 782\times783, 11339\times11340)$, $(14\times15, 13\times14, 195\times196)$, $(13\times14, 782\times783, 10556\times10557)$ son soluciones, y además se cumple que $(11339 \times 11340)(13 \times 14)^2 = (195 \times 196)(10556 \times 10557)$.

     ¿Puedes decir cuál es la relación y encontrar otras ternas de soluciones que satisfagan esto?