# Entrenamiento Concurso Galois-Noether
# Lista 2

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

## 1. Heurísticas, Parte 2

**Notación efectiva** Consiste en elegir una notación que permita trabajar poco o al mismo tiempo descubrir cosas del problema. Necesita un balance entre reflejar correctamente los datos del problema y ser sencilla.

**Simetría** En algunos problemas hay elementos que se comportan igual. De este modo, no se necesita repetir argumentos y se puede argumentar "por simetría". Así mismo, hay otros problemas en los que la simetría nos puede ayudar a comprender los casos extremos.

**Casos** Un problema grande se puede dividir en casos para reducirlo a problemas más atacables. La idea es considerar ciertas familias de posibilidades y para cada una de ellas dar una solución. Otra forma de aprovechar la división de casos es el "efecto bola de nieve", en el cual ciertos casos nos ayudan a resolver otros.

### 1.1. Problemas de Calentamiento

1. Sea $n$ un entero tal que $3n+1$ es un número cuadrado perfecto. Muestra que $n+1$ es la suma de tres cuadrados perfectos.

2. Usa simetría para desarrollar la expresión $(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)$.

3. Prueba que la diferencia de cuadrados de dos números impares siempre es múltiplo de 8.

### 1.2. Problemas

1. ¿Cuántas veces al día se cruzan las manecillas de un reloj?

2. Se tienen dos postes de teléfono, uno de altura $a$ y otro de altura $b$. Se cuelgan dos cables, cada uno va de la parte superior de un poste a la base del otro. Los cables se intersectan en un punto $P$. ¿A qué altura está $P$?

3. Muestra que se cumple la igualdad $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

4. Usa el principio de la razón insuficiente para encontrar el mínimo valor de la expresión $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$ para aquellos reales positivos que satisfacen $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Muestra tu conjetura.

   *Sugerencia* La notación adecuada es tomar $x_j=\frac{1}{n}+e_j$, con la suma de los $e_j$ igual a cero.

5. Considera los tres puntos en $\mathbb{R}$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10000$. Encuentra un punto $x\in\mathbb{R}$ tal que la suma de las distancias de $x$ a estos tres puntos sea mínima.

6. Encuentra las soluciones para

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=A$$

en los casos $A = 1$, $A = \sqrt{2}$ y $A = 2$.

## 1.3. Tarea

1. Muestra que si se eligen $n+1$ números de los números de 1 a $2n$, entonces se eligen dos tal que uno divide al otro.

   *Sugerencia* Escribe a cada número de la forma $2^j k$ con $k$ un entero impar.

2. Encuentra las soluciones a la ecuación $x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$.

   *Sugerencia* Divide la ecuación entre $x^2$ y haz substitución $u = x + \frac{1}{x}$.

3. Encuentra todas las potencias de dos que difieren en 1 de una potencia de 3.

4. **Problema de exploración** En este problema veremos cuándo un tablero de $a \times b$ se puede cubrir con fichas de $n \times 1$ y de $1 \times n$.

   - Intenta cubrir un tablero de $3 \times 7$ con fichas de $4 \times 1$. ¿Por qué no se puede? Intenta cubrirlo con fichas de $3 \times 1$. Esta vez sí se puede.
   - Intenta cubrir un tablero de $2012 \times 2012$ con fichas de $4 \times 4$. ¿Se puede?
   - Intenta cubrir un tablero de $6 \times 6$ con fichas de $4 \times 1$ ¿Se puede?
   - Justifica por qué $n$ tiene que dividir a $ab$ para que se pueda cubrir el tablero. Veremos que esto no es una condición suficiente.
   - ¿Qué sucede si $n$ divide a $a$? ¿Cómo le haces para cubrir con fichas el tablero?
   - ¿Por qué es necesario que $n$ divida a $a$ o $b$ y no basta que divida a $ab$? ¿cuál es la diferencia?
   - Prueba que un tablero de $a \times b$ puede ser cubierto con fichas de $n \times 1$ si y sólo si $n$ divide a $a$ o $n$ divide a $b$.