

Entrenamiento Concurso Galois-Noether

Lista 1

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

1. Heurísticas, Parte 1

Buscar un patrón Una buena táctica para resolver un problema es buscar patrones en casos sencillos. El problema se ataca en los primeros casos hasta encontrar un patrón y posteriormente se prueba el patrón.

Hacer una figura La ayuda visual es fundamental para resolver un problema. Nos permite ver varios datos al mismo tiempo y realizar conjeturas. Las observaciones que se tengan.

Problema equivalente A veces resulta conveniente volver a decir el problema pero en otros términos. Buscar un problema equivalente consiste en hacer una reformulación de un problema que haga más evidente la solución o que nos de pistas de cómo se puede resolver un problema.

1.1. Problemas de Calentamiento

1. Se escribe una lista de números así: $1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, \dots$, en donde un nuevo término es el producto de los tres anteriores. Encuentra el dígito de las unidades del número en la posición 2012. ¿Puedes dar también el dígito de las decenas?
2. ¿Se puede cubrir un tablero de 8×8 con fichas de 3×1 y 1×3 ? ¿se podrá si le quitas una casilla?
3. Se quieren elegir 24 personas de un grupo de 26. ¿De cuántas formas se puede hacer eso?

1.2. Problemas

1. Un teorema conocido dice que un primo $p > 2$ puede ser escrito como suma de dos cuadrados si y sólo si deja residuo 1 al dividirse entre 4. Explora qué primos $p > 2$ se pueden escribir de la forma $x^2 + 16y^2$. Haz una conjetura e intenta probarla.
2. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ y $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Encuentra una fórmula para el término general a_n .
3. En el triángulo ABC se han trazado triángulos equiláteros externos ABC' y ACB' . Muestra que $BB' = CC'$.
4. El señor y la señora Smith fueron a una fiesta en donde hubo otras tres parejas. Hubo varios saludos de mano. Nadie saludó a su pareja y nadie saludó a nadie más de una vez.
Al final de los saludos, el Sr. Smith le preguntó a cada persona, incluyendo su esposa, cuántas personas había saludado. Resulta que todos dijeron un número distinto. ¿Cuántas personas saludó el Sr. Smith.
5. ¿De cuántas formas se puede sumar el número n con enteros positivos, de manera que el orden sí importe? Por ejemplo, el 4 se puede sumar así: $4, 1 + 3, 3 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1, 2 + 2$ y $1 + 1 + 1 + 1$, que es un total de 8 formas.

Sugerencia Haz los primeros casos para formar una conjetura. Para probarla, observa que “sumar n de alguna forma” es elegir algunos signos para eliminar en $1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ y juntar los demás números.

6. En un cuadrado $ABCD$ los puntos medios de AB , BC , CD y DA son K , L , M y N respectivamente. Al trazar los segmentos KC , LD , MA y NB se forma otro cuadrado en el centro. Encuentra la razón de las áreas de ambos cuadrados.

1.3. Tarea

1. ¿Qué cantidad de casillas puede alcanzar un rey de ajedrez en 5 turnos? ¿en 10? ¿en 100? ¿y un caballo de ajedrez?

Sugerencia Haz casos pequeños para ver qué ideas te dan.

2. De un mismo lado de un río recto hay dos casas A y B . Una persona que vive en la casa A quiere pasar por agua al río y luego ir a la casa de la persona B . ¿Cómo determina el camino más corto que cumpla esta propiedad?

Sugerencia Refleja la casa B en el río y aplica la desigualdad del triángulo.

3. ¿Para qué valores de a el siguiente sistema de ecuaciones tiene cero, una, dos, tres, cuatro soluciones, respectivamente?

$$\begin{aligned}x^2 &= y^2 \\(x - a)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

Sugerencia Traduce el problema en algo geométrico.

4. **Problema de exploración** En este problema intentaremos ver qué residuos dejan algunos números elevados a ciertas potencias.

- Comenzaremos con las potencias de 3 y los residuos que dejan al dividirse entre 7. Encuentra los residuos de dividir 3^j entre 7 para $j = 1, 2, \dots, 20$. ¿Qué pasa con los residuos? ¿Qué pasa con 3^0 , 3^6 , 3^{12} , etc?
- Intenta ahora con las potencias 4 y dividir entre 7.
- Ahora siempre elevaremos a la sexta potencia. ¿Qué sucede con los números cuando elevamos a la sexta potencia? ¿Qué residuo dejan al dividirse entre 7?
- Muestra que $n^2 - n$ siempre es divisible entre 2, que $n^3 - n$ siempre es divisible entre 3, que $n^5 - n$ es divisible entre 5, que $n^7 - n$ es divisible entre 7. ¿Qué pasa con $n^9 - n$?
- Prueba el siguiente teorema. Si p es un primo y n es un entero, entonces $n^p - n$ es divisible entre p .

Sugerencia Aplica un argumento inductivo y el binomio de Newton. Justifica por qué todos los coeficientes $\binom{p}{k}$ del binomio de Newton son múltiplos de p para toda $k = 1, 2, \dots, p-1$. ¿Qué pasa con los otros sumandos?