Seminario de Resolución de Problemas
Lista 9: Cálculo

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

"Listen and you will forget. Learn and you will remember.
Do ir yourself, and you will understand."

Tarea

1. Considera los tres puntos en $\mathbb{R}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 10000$. Encuentra un punto $x \in \mathbb{R}$ tal que la suma de las distancias de x a estos tres puntos sea mínima.

2. Encuentra $\int_0^1 \log x \log(1-x)\, dx$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función contínua que cumple con $f(x)f(f(x)) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $f(0) = 2$, encuentra $f(1)$.

4. ¿Existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ y $f'(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

5. Encuentra a y b tales que para toda $n \geq 1$ se cumple

$$\int_0^\pi (ax + bx^2)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{n^2}.$$

   Como dato curioso, este problema puede servirte para demostrar que $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona y $a \in \mathbb{R}^+$. Muestra que

$$\int_{-a}^{a} x f(f(x))\, dx \geq 0$$

7. Sean f y g funciones integrables en el intervalo $[0, 1]$ con f decreciente, g creciente y $\int_0^1 f = \int_0^1 g$. Muestra que para $x, y \in (0, 1)$ se tiene que

$$y \int_0^x f(t)\, dt \geq x \int_0^y g(t)\, dt.$$

8. a) Muestra que para $0 < a < b$ se cumple

$$\sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\log b - \log a} \leq \frac{a+b}{2}.$$

b) Muestra que para $u \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$1 \leq \frac{e^u - e^{-u}}{2u} \leq \frac{e^u + e^{-u}}{2}.$$

9. Sean $f, g : [0,1] \to [0,1]$ funciones contínuas con f creciente. Muestra que

$$\int_0^1 f(g(x))\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx.$$

10. Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene la *Propiedad del valor intermedio* si para cualesquiera dos números $a < b$ se tiene que $f([a,b])$ contiene al intervalo cerrado entre $f(a)$ y $f(b)$.

    Muestra que tener la propiedad del valor intermedio no es una propiedad aditiva, esto es, que puede ser que f y g tengan la propiedad del valor intermedio, pero $f + g$ no.

11. Muestra que para una función decreciente $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ se cumple

$$\frac{\int_0^1 x f(x)^2\,dx}{\int_0^1 x f(x)\,dx} \leq \frac{\int_0^1 f(x)^2\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

12. Sean a_i, $1 \leq i \leq n$ reales positivos distintos. Considera la matriz $A = \left(\frac{1}{a_i + a_j}\right)_{ij}$. Prueba que la matriz es simétrica positiva definida, es decir, que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $x^t A x \geq 0$ y que $x^t A x = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Extra

$\star$ Sea f un polinomio con coeficientes reales. Definimos $f_0 = f$ y recursivamente $f_{n+1} = f_n + f_n'$. Muestra que existe una M entera para la cual si $k > M$, entonces f_k tiene todas sus raíces reales y distintas.