Seminario de Resolución de Problemas
Lista 8: Números enteros

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

"God does arithmetic"
C. F. Gauss

Tarea

1. Encuentra el número más pequeño con 28 divisores.

2. Muestra que para cualquier entero n existe un múltiplo de n tal que su representación decimal sólo tiene ceros y unos.

3.
   - A un tablero cuadrado de $n \times n$ se le han quitado dos cuadritos. Muestra que no puede ser cubierto con fichas de 3×1.
   - A un cubo de $n \times n \times n$ se le han quitado dos, tres o cuatro cuadritos. ¿Es posible cubrirlo con bloques de $9 \times 1 \times 1$?

4. Se comienza con un entero n. En cada paso se obtiene un nuevo número sumando al anterior su dígito más grande. ¿Cuál es la mayor cantidad de números impares seguidos que se pueden obtener así?

5.
   - Prueba que la sucesión 11, 111, 1111, 11111, $\ldots$, no hay números cuadrados.
   - Muestra que ningún primo de la forma $4k+3$ es suma de dos cuadrados.
   - Prueba que la diferencia de cuadrados de dos números impares siempre es múltiplo de 8.

6. Se tienen cuatro enteros distintos tales que

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-4=0$$

   tiene una solución entera r. Muestra que $4r = a+b+c+d$.

7. Muestra que de 8 números enteros distintos elegidos entre 1 y 2011 hay cuatro de ellos, digamos a, b, c y d, tales que

$$4+d \leq a+b+c \leq 4d$$

8. - Si $x^3 + y^3 = z^3$ tuviera una solución en enteros x, y y z, muestra que al menos uno de ellos debe ser múltiplo de 7.
   - Si n es un entero positivo mayor a 1 tal que $2^n + n^2$ es primo, muestra que $n \equiv 3 \pmod 6$.
   - Muestra que si $n^2 + m$ y $n^2 - m$ son cuadrados perfectos, entonces m es divisible entre 24.

9. - (El Teorema de los cuatro números) Muestra que si a, b, c y d son enteros tales que $ab = cd$, entonces existen enteros k, l, m y n tales que $a = kl$, $b = mn$, $c = km$, $d = ln$.
   - Muestra que si a, b, c y d son enteros positivos tales que $ab = cd$, entonces $a + b + c + d$ no puede ser primo.

10. Sean p, q y r primos distintos y sea $a = (pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1$. Demuestra que si pqr divide a a, entonces $(pqr)^3$ divide a $3a$.

11. Un alfabeto tiene l letras. Con él se forman palabras por medio de la concatenación. Una palabra a es un prefijo de una b si la palabra b empieza con a. Sea S un conjunto de palabras de modo que ninguna es prefijo de otra y n_i la cantidad de palabras de longitud i en S. Muestra que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{l^i} \leq 1$$

.

12. Dados dos enteros positivos m y n, decimos que una función $f : [0, m] \to \mathbb{R}$ es $(m, n)-$resbalosa si posee las siguientes propiedades:

    a) f es contínua;
    b) $f(0) = 0$, $f(m) = n$ y,
    c) Si $t_1, t_2 \in [0, m]$ con $t_1 < t_2$ son tales que $t_2 - t_1 \in \mathbb{Z}$ y $f(t_2) - f(t_1) \in \mathbb{Z}$, entonces $t_2 - t_1 \in \{0, m\}$.

    Determina los valores m, n para los cuales existe una función $(m, n)-$resbalosa.

Extra

$\star$ Se eligen dos enteros positivos. Su suma se le da a un matemático A y su suma de cuadrados a un matemático B. Tanto a A como a B se les da esta información, así como la información en esta oración. Los matemáticos tienen la siguiente conversación:

B : “No se qué números son.”
A : “No se qué números son.”
B : “No se qué números son.”
A : “No se qué números son.”
B : “No se qué números son.”
A : “No se qué números son.”
B : “Ya se qué números son”

a) ¿Cuáles son los dos números?

b) Cuando B dice que no puede decir qué números son, A tiene una gran cantidad de información. Pero cuando A dice que no puede decir qué números son, B ya lo sabe. ¿Por qué es bueno para B escuchar este comentario de A?