# Seminario de Resolución de Problemas
# Lista 6

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

*"I've done the calculation and your chances of winning the lottery are identical whether you play or not."*
*Fran Lebowitz*

**Tarea**

1. El entero positivo $n$ y el primo $p$ cumplen $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 83p$. Encuentra la razón $\frac{n}{p}$.

2. Dos discos de radio uno pasa cada uno de ellos por el centro del otro. ¿Cuál es el área de su intersección?

3. 
   - La persona $A$ elige un número entre 0 y $2^{n-1}$ inclusive. La persona $B$ trata de adivinar el número de $A$ con preguntas de sí o no. ¿Cuál es el mínimo número de preguntas de sí o no que se necesitan para garantizar que $B$ encuentra el número de $A$?
   - Determina una forma de elegir las preguntas desde antes, sin que dependan de lo que vaya respondiendo $A$.

4. Encuentra el dibujo que falta:


5. Sea $M$ una matriz de $n \times n$ simétrica, de modo que cada fila y cada columna sea una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si $n$ es impar, muestra que también la diagonal principal es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$. ¿Qué sucede si $n$ es par?

6. Encuentra todos los números de 10 dígitos $n = a_0 a_1 \ldots a_9$ tales que $a_i$ es el número de veces que aparece el dígito $i$ en $n$.

7. 
   - Sea $n$ un entero tal que $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ es divisible entre $k$. Muestra que $k$ o $k-1$ son divisibles entre 5.
   - Concluye que hay una infinidad de primos de la forma $5j + 1$.

8. Encuentra todas las funciones contínuas $f$ que satisfacen:

$$f(x) = x + \int_0^2 f(y)\, dt.$$

9.
   - Dados 1000 puntos cuales quiera en el plano, muestra que existe una circunferencia tal que no pasa por ninguno de ellos y que tiene exactamente 500 puntos dentro.
   - Dados 1001 puntos en el plano, no tres de ellos colineales y no cuatro de ellos concíclicos, muestra que hay exactamente 250000 circunferencias con tres puntos en su orilla, 499 dentro y 499 fuera.

10. Sea $A$ una matriz de $n \times n$ con entradas iguales a 0 o a 1 de modo que en cada fila y en cada columna aparece exactamente un 1. Demuestra que existe un número natural $m$ tal que $A^m = A^T$.

11. Sean $b_0$, $b_1$, $b_2$, ..., reales no negativos y $a$ un real positivo. Muestra que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_n}{(a + b_0 + b_1 + \ldots + b_n)^{\frac{3}{2}}}$$

converge.

12. $\star$ Sean $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ números reales mayores a $-1$ y $\alpha$ cualquier real positivo. Muestra que si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \alpha n$, entonces

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} \geq \frac{n}{\alpha+1}.$$