

# Seminario de Resolución de Problemas

## Lista 4

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval  
José Antonio Gómez Ortega

*“Hay que empezar de cero para tocar el cielo.”*  
*Shakira*

### Tarea

1. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el determinante de una matriz de  $4 \times 4$  cuyas entradas sólo pueden ser ceros o unos?
2.
  - Quita los cuadrados superior izquierdo e inferior derecho de un tablero de ajedrez. Muestra que el tablero que queda no puede ser cubierto por fichas de  $2 \times 1$ .
  - Quita dos cuadrados de igual color de un tablero de ajedrez. Muestra que el tablero que queda puede ser cubierto por fichas de  $2 \times 1$ .
3. Tres estudiantes,  $A$ ,  $B$  y  $C$  concursan en hacer algunos exámenes. Por sacar el primer lugar en un examen, un estudiante gana  $x$  puntos; por quedar en segundo  $y$  puntos y por quedar en tercero,  $z$  puntos. Aquí,  $x$ ,  $y$  y  $z$  son enteros positivos con  $x > y > z$ . No hubo empates en ningún examen. En total,  $A$  acumuló 20 puntos,  $B$  acumuló 10 puntos y  $C$  acumuló 9 puntos. El estudiante  $A$  sacó segundo lugar en el examen de álgebra. ¿Quién quedó en segundo lugar en el examen de geometría?
4. De un mismo lado de un río recto hay dos casas  $A$  y  $B$ . Una persona que vive en la casa  $A$  quiere pasar por agua al río y luego ir a la casa de la persona  $B$ . ¿Cómo determina el camino más corto que cumpla esta propiedad?
5. Cada casilla de un tablero de  $11 \times 11$  se pinta de rojo, negro o azul. Para cada casilla  $C$ , el número  $a_C$  es la cantidad de cuadros rojos en la misma fila que  $C$  y el número  $b_C$  es la cantidad de cuadros negros en la misma columna que  $C$ . En cada casilla  $C$  se escribe  $a_C + b_C$ . Si se pintaron 111 cuadros azules, ¿cuál es la suma de todos los números que se escribieron en las casillas?
6. Un cuadrado antimágico es una matriz de  $n \times n$  cuyas entradas son, en algún orden, los enteros de 1 a  $n^2$ , de modo que si eliges cualesquiera  $n$  elementos, ningunos dos de ellos en la misma fila o columna, al sumarlos obtienes siempre lo mismo. ¿Para qué valores de  $n$  existe un cuadrado antimágico?

7. Muestra que un disco (circunferencia con su interior) no se puede poner como unión de dos conjuntos congruentes y ajenos. Dos conjuntos son congruentes si existe una isometría que mande uno en el otro.
8. Define una sucesión de enteros  $a_0, a_1, \dots$  como sigue:  $a_0 = 0$  y dados los términos hasta  $a_n$ , se construye  $a_{n+1}$  como el menor entero mayor que  $a_n$  tal que ningunos tres términos de la sucesión hasta  $a_{n+1}$  formen una progresión aritmética. Encuentra una fórmula simple para determinar a  $a_n$ .
9. Muestra que para todo entero positivo  $n$  se tiene que:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2.$$

10. Muestra que si un rectángulo  $R$  puede ser cubierto con una cantidad finita de rectángulos (con lados paralelos a los de  $R$ ), cada uno de ellos con al menos un lado entero, entonces  $R$  tiene al menos un lado entero.
11. ¿Puedes dividir un polígono convexo en cuadriláteros no convexos?
12. ★ Sea  $N$  un entero y  $k$  un entero entre 1 y  $N$ . Sean  $n_1, n_2, \dots, n_k$  enteros no negativos tales que su suma es  $N$ . Encuentra el valor mínimo de la suma:

$$\sum_{j=1}^k \binom{n_j}{2}$$

### Recordatorio

Una breve lista para recordar lo que vimos de heurística:

- Encontrar un patrón
- Hacer un dibujo
- Formular un problema equivalente
- Modificar el problema
- Escoger notación efectiva
- Explotar la simetría
- Dividir en casos
- Trabajar hacia atrás
- Argumentar por contradicción
- Perseguir la paridad
- Considerar casos extremos
- Generalizar

Para acostumbrarte a una técnica, al principio hay que usarla indiscriminadamente, incluso hasta un punto forzado. Como cualquier otra herramienta, el intentar mucho usar una técnica te dará una mejor orientación de cuáles son sus capacidades y cuáles son sus límites.

En la página [www.matematicas.unam.mx/omdf/material.html](http://www.matematicas.unam.mx/omdf/material.html) hay una gran cantidad de problemas sencillos en los cuales puedes practicar estas técnicas. Es recomendable empezar con los problemas sencillos de opción múltiple de los folletos, haciendo conciencia de que quieres forzosamente usar una de las técnicas anteriores.

Recuerda también checar otros ejemplos del Larson, en clase no vimos todos.