

Seminario de Resolución de Problemas

Hints Lista 1

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

Sugerencias

1. Para encontrar cuántos juegos van a ser, es conveniente primero explorar casos pequeños. Intenta ver para $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ cuántos partidos hay para decidir un ganador. Esto te dará una muy buena pista de cuántos juegos serán. Luego hay que hacer la demostración. Para hacerla, dos preguntas clave son ¿cuántas personas tienen que perder para que haya un ganador? ¿cuántas personas pierden en cada juego?
2. Hay que desarrollar el álgebra para encontrar una ecuación que involucre a $a - b$. Recuerda usar la hipótesis de que a y b son distintos.
3. Para encontrar el patrón haz casos pequeños. ¿Cómo van cambiando los números de casos pequeños? Para la demostración, haz un argumento inductivo que justifique por qué cada que cortas con una nueva línea se aumentan las regiones según el patrón que observaste. Los cortes no necesariamente tienen que ser verticales, puedes girarlos y rotarlos. Para los tres cortes hay que visualizar con calma. Para más cortes, es difícil imaginarlo, mejor piensa cómo podrías adaptar el argumento de la primera parte para la dona.
4. Se pueden ir acumulando ceros conforme acumulas doses y cincos. Algunos números, como el 25, dan más de un cinco. Ojo, hay otros que acumulan más de dos cincos.
5. Procede por contradicción para eliminar casos rápidamente. En todos los problemas la solución es única.
6. Haz algunos casos para encontrar el mínimo. Para demostrarlo, juega algebraicamente hasta llegar a una expresión del estilo $x^2 \geq 0$. La idea para el segundo inciso es la misma.
7. De los números del 1 al 20 ve cuáles puedes expresar como suma de enteros consecutivos, por ejemplo el 12 es $3 + 4 + 5$. Se va a ver un patrón muy evidente. Esto es para conjeturar cuáles se pueden, aún tienes que demostrarlo. Para mostrar que son estos números, escribe a un número que se pueda como $n = (k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + r)$. Hay que argumentar por qué esto siempre tiene un factor impar mayor a 1. Por otro lado, si tiene un factor impar, tienes que dar una forma general de escribirlo como suma de dos o más enteros consecutivos.
8. Para encontrar el máximo tienes que usar derivadas y argumentar por qué el punto que encuentras sí es máximo y no mínimo. Luego, justifica por qué el signo entre π^e y e^π es el mismo que entre $\pi^{\frac{1}{\pi}}$ y $e^{\frac{1}{e}}$. Esto te permitirá usar la primera parte del problema.

9. Calcula el ángulo entre las rectas que forman al triángulo de dos formas distintas. Llegaras a una contradicción con respecto a la racionalidad de un número. Alternativamente, puedes calcular el área del triángulo de dos formas distintas.
10. Comienza con pocas piezas, probando todos los posibles valores: $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ y así sucesivamente. Si tienes suficientes casos, podrás conjeturar algo que tiene que ver con la sucesión de Fibonacci.
11. ¡No le tengas miedo a hacer cuentas! Hay que simplificar de manera cuidadosa la expresión, ver qué puedes juntar o factorizar.