Seminario de Resolución de Problemas
Lista 13: Desigualdades

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

"La peor forma de desigualdad es intentar
hacer iguales cosas diferentes."
Aristóteles

Tarea

1. Ordena los siguientes números de mayor a menor: 2^{847}, 3^{539}, 5^{363}, 7^{308} y 11^{242}.

2. Muestra para números positivos x_1, x_2, ..., x_n que

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

3. Sean a y b reales positivos con $a + b \geq 1$. Encuentra el mínimo valor de la expresión $ab + \frac{1}{ab}$. ¿Para qué parejas (a, b) se alcanza el mínimo?

4. Muestra que la media aritmética a de los números x_1, x_2, ..., x_n satisface

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \ldots + (x_n - a)^2 \geq \frac{1}{2}\left(|x_1 - a| + \ldots + |x_n - a|\right)^2.$$

5. Demuestra que para todo entero positivo n se tiene que

$$(n+1)^2 > 3\sqrt[n]{n!^2}.$$

6. Sea a un número real mayor a 1 y n un entero positivo. Muestra que

$$a^n - 1 \geq n\left(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

7. ¿Para qué entero positivo n la expresión $\frac{100^n}{n!}$ alcanza su máximo?

8. Considera n fracciones $\frac{a_1}{b_1}$, ..., $\frac{a_n}{b_n}$ con denominadores positivos. Muestra que la fracción $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$ está entre la menor y la mayor de estas n fracciones.

9. Demuestra que:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}} > \frac{9}{2}$, y que

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{998^2}+\sqrt[3]{998\cdot 999}+\sqrt[3]{999^2}} < \frac{9}{2}$.

10. Sean $a, b > 0$ con $a + b = 1$ y $q > 0$. Muestra que

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^q + \left(b + \frac{1}{b}\right)^q \geq \frac{5^q}{2^{q-1}}.$$

11. Sean f y g funciones reales. Muestra que hay reales x y y entre 0 y 1 (inclusive) tales que $|xy - f(x) - g(y)| \geq \frac{1}{4}$.

12. Sean a, b, c, d y e reales positivos y $f : \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid c - dx - ey > 0\} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x, y) = (ax)(by)(c - dx - ey)$. Encuentra el valor máximo de f.