

Seminario de Resolución de Problemas

Lista 12: Series

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

*“Now you have series problems
(tum tum pshhh...)”*

Tarea

1. Sea F_n la sucesión de Fibonacci ($F_0 = 0, F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Encuentra el valor de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{7^n}$.
2. Encuentra una fórmula cerrada para la recursión definida por:

$$a_0 = 1$$
$$a_{n+1} = na_n + (n-1)a_{n-1} + \dots + 2a_2 + a_1 + 1$$

3. Sean a y b números reales. La sucesión a_n se define como $a_1 = a$, $a_2 = b$ y $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ para cada entero positivo n . Encuentra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
4. ¿Cuánto vale la suma $1 \cdot 2011 + 2 \cdot 2010 + 3 \cdot 2009 + \dots + 2010 \cdot 2 + 2011 \cdot 1$?
5. Evalúa el producto infinito

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}).$$

6. Se tiene una cantidad ilimitada de dominós. Se hace una torre de dominós en la orilla de una mesa, poniendo un dominó sobre otro, aunque queden un poco desfasados. ¿Qué tan lejos de la mesa puede quedar el dominó de hasta arriba sin que caiga la torre?

Nota: La condición para que una torre no se caiga es que el centro de masa de todos los dominós arriba de cada dominó D esté arriba de D .

7. Encuentra la cantidad de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, 2003\}$ cuya suma de elementos sea divisible entre 5.

8. Dos jugadores A y B juegan a lo siguiente. Se fija un real positivo x . A elige un número $a \in \{1, 2\}$ y B elige un número $b \in \{1, 2\}$. Después de esto, B le da a A $x(a + b)$ pesos. Además, si $a \neq b$, entonces A le da a B un peso. Ambos jugadores juegan siempre su mejor estrategia. ¿Qué valor de x hace el juego justo?, es decir, ¿para qué valor de x a la larga a los jugadores les va igual?
9. Considera la serie de potencias

$$\frac{1}{1 - 2x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Muestra que para cada entero $n \geq 0$, existe un entero m tal que $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_m$.

10. Un tablero de 8×8 se quiere cubrir con 21 fichas de 3×1 y una ficha de 1×1 . Encuentra un acomodo válido y explica cómo lo conseguiste.
11. Tira un dado n veces. Encuentra la probabilidad de que la suma de los números que salieron sea múltiplo de 5.
12. Muestra que para cualquier real x se cumple que $e^x > x$. Encuentra el número real más grande y para el cual es falso que $a^y > y$ para alguna y .