Seminario de Resolución de Problemas
Lista 11: Sucesiones

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

"It is better to know some of the questions than all of the answers."
The Everly Brothers

Tarea

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función contínua con $f(0)=1$. Encuentra el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_x^{x^2} tf(t)\,dt.$$

2.
   - Muestra que para a, b y c enteros no negativos que $\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b+c}{a+b}\binom{a+b}{a}$.
   - Muestra para a, b, c y d enteros no negativos que

$$\sum_{c=0}^{d}\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b}{a}\binom{a+b+d+1}{a+b+1}.$$

3. Considera d_n como sigue:

$$d_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Muestra que

$$d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}.$$

Concluye que $\lim_{n\to\infty} d_n=\ln 2$.

4. Leo está una tarde tomando café y resolviendo problemas. Para ver cómo va, hace una cuenta de la cantidad de problemas que resuelve. El número $b(k)$ es la cantidad de problemas que resolvió tras intentar los primeros k (para los otros leyó la solución). Se da cuenta que al inicio de la tarde la proporción de problemas que había resuelto (es decir, $\frac{b(k)}{k}$) era menor a 80% y al final de la tarde la proporción era mayor a 80%. ¿Necesariamente hubo algún momento en el que la proporción fuera exactamente 80%?

5. Expresa $(0^3 - 350)(1^3 - 349)\dots(350^3 - 0)$ tan concisamente como sea posible.

6. Tres jugadores, A, B y C tiran una moneda repetidas veces. El jugador A gana si la primera vez que cae sol es en un volado múltiplo de 3. El jugador B gana si es en un múltiplo de 3 más 1. El jugador C gana en otro caso. Encuentra la probabilidad de que gane el jugador B.

7. Calcula la siguiente serie:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3(3^k)}{3^k}.$$

8. Muestra que cualquier real es límite de números de la forma $\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}$ para m y n enteros no negativos.

9. Estudia la sucesión $a_n = \binom{n}{0}^{-1} + \binom{n}{1}^{-1} + \dots + \binom{n}{n}^{-1}$. ¿Converge?

10. Sea $d(n)$ la cantidad de divisores positivos de n. Calcula la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2}$.

11. Demuestra que la proporción de gráficas etiquetadas conexas en n vértices tiende a 1 conforme n tiende a infinito. Es decir, si tienen n vértices, se consideran las $2^{\binom{n}{2}}$ posibles gráficas que se pueden formar con estos vértices. Se toma C_n la cantidad de estas gráficas que es conexa. Hay que demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{2^{\binom{n}{2}}} = 1$.

12. $\star$ Sea $2k+1$ un número entero impar. Sea A el conjunto de subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, 2k+1\}$ y B el conjunto de subconjuntos de $k+1$ elementos de $\{1, 2, \dots, 2k+1\}$. ¿Existirá una a función biyectiva $f : A \to B$ de modo que $a \subseteq f(a)$ para todo $a \in A$?

Extra

Demuestra la siguiente identidad para n un entero positivo:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

((+2) extra por una prueba combinatoria).