Tarea IV

Álgebra Lineal I

1. Demuestra que una combinación lineal de dos transformaciones n-lineales es una transformación n-lineal, con las operaciones definidas de la siguiente manera.
$$(\delta_1 + \delta_2)(A) = \delta_1(A) + \delta_2(A)$$
y
$$(k\delta)(A) = k\delta(A).$$

2. Decimos que una matriz $M \in M_n(\mathbb{C})$ es *nilpotente* si $M^k = O_n$, para algún entero positivo k. Demuestra que si M es nilpotente, entonces $\det M = 0$.

3. Decimos que una matriz $Q \in M_n(\mathbb{R})$ es *ortogonal* si $Q^t Q = I_n$. Demuestra que si Q es ortogonal, entonces $\det Q = \pm 1$.

4. Para $M \in M_n(\mathbb{C})$, sea $\overline{M}$ la matriz tal que $(\overline{M})_{ij} = \overline{M_{ij}}$, donde $\overline{M_{ij}}$ es el conjugado complejo de M_{ij}. Decimos que una matriz $Q \in M_n(\mathbb{C})$ es unitaria si $QQ^* = I_n$, donde $Q^* = \overline{{}^tQ}$. Demuestra que si Q es una matriz unitaria, entonces $|\det Q| = 1$.

5. Demuestra que para cualquier matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$
$$\det(A \cdot {}^tA) \geq 0.$$

6. Demuestra que para cualquier matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$
   a) $\det(A^2 + I_n) \geq 0$.
   b) $\det(A^2 + A + I_n) \geq 0$.

7. Decimos que una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es *estocástica* si $a_{ij} \geq 0$ para cualesquiera $i, j \in [1, n]$ y $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \;\; \forall i \in [1, n]$.
   a) Demuestra que 1 es un eigenvalor de cualquier matriz estocástica.
   b) Demuestra que cualquier eigenvalor λ de una matriz estocástica satisface $|\lambda| \leq 1$.

8. Demuestra que los eigenvalores de una matriz triangular superior M son las entradas diagonales de M.

9. Sea x un número real. Calcula el determinante de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}.$$

10. Dados números reales a, b, c, u, v, w, resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} ax - by = u \\ by - cz = v \\ -ax + cz = w \end{cases}$$

11. Encuentra los eigenvalores y calcula el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. Para cada una de las siguientes matrices calcula su polinomio característico.

    a)
    $$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

    b)
    $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

    Después encuentra sus eigenvalores y al menos un eigenvector para cada eigenvalor.

13. Las entradas de la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ están entre -1 y 1. Demuestra que

    $$|\det A| \leq n^{n/2}.$$

    Sugerencia. Usa la desigualdad de Hadamard.

14. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices tales que ${}^tAA = {}^tBB$. Demuestra que existe una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}$ tal que $B = UA$. **Sugerencia**. Usa la descomposición polar.