Sucesiones y series en la Olimpiada

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
ssbmplayer@gmail.com

29, 30 y 31 de marzo de 2012
Curso de entrenadores de la OMM
Guanajuato, Gto.

1 Sucesiones

1.1 Introducción

Podemos pensar una sucesión como un tendedero de ropa en el cual se han colgado algunos números. Hay un primer número y a partir de ahí los siguientes números están ordenados uno tras otro. A continuación mostramos muchos ejemplos de tendederos de números. Los puntos suspensivos indican que la sucesión continúa indefinidamente.

- $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$
- $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots$
- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \ldots$
- $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, \ldots$
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \ldots$
- 0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, 0.11111, 0.111111, 0.1111111, 0.11111111, 0.111111111, ...
- $10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, \ldots$
- $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$
- $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \ldots$

En todos los ejemplos anteriores la sucesión tiene cierto patrón u orden, pero esto no quiere decir que todas las sucesiones tengan que ser así. Por ejemplo, las siguientes listas de números también son sucesiones, pero o bien no tienen ningún orden, o bien tienen un orden más oculto.

- $3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, \ldots$
- $4, 12, 17, 0, 0, 11, 18, 54, 2, 54, \ldots$

- $1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, \ldots$

Por supuesto, uno se da cuenta rápidamente de que estar escribiendo tendederos para escribir una sucesión resulta poco práctico por varias razones. La primera, es que tenemos que escribir muchos números. La segunda es que realmente no podemos estar seguros de cómo continúa la sucesión.

Por estas razones, haremos un cambio de notación que nos ayude a remediar estos dos problemas. En vez de escribir una lista de números uno tras otro y tener la esperanza de que el lector pueda adivinar la regla, es bastante mejor dejar bien claro cuál es la regla de la sucesión. Así, para referirnos a una sucesión la denotaremos por $\{a_n\}$, o $\{x_n\}$ o alguna variación, en donde pensamos que la a (o la x) es fija, pero conforme n varía tenemos los números de la sucesión.

De este modo, en vez de escribir $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots$, podemos escribir simplemente "la sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_n = 2n$", o bien, simplemente $\{2n\}$. El lector puede intentar escribir reglas similares para las otras sucesiones que se dieron de ejemplo.

Tener una fórmula sencilla para calcular los números de una sucesión es muy importante, pues nos permite calcular el valor de cualquier término de la sucesión fácilmente.

Ojo: Cuando escribimos $\{a_n\}$ hay que recordar que no estamos refiriéndonos únicamente a un número, sino a una sucesión, es decir, a muchos números ordenados. Cuando escribimos a_n, entonces sí nos estamos refiriendo sólo a uno de los números de la sucesión, al $n-$ésimo.

Algunas veces el subíndice (el número pequeño) comienza en 0 y otras veces en 1, es decir, a veces $\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ y otras veces $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Casi siempre a partir del contexto del problema se puede saber qué opción se está eligiendo.

Puede haber sucesiones de muchas cosas. Si decimos que $\{a_n\}$ es una sucesión de enteros, entonces todos los elementos que la conforman son enteros. Si decimos que $\{a_n\}$ es una sucesión de racionales, entonces los números que la conforman deben ser racionales. De modo similar, podemos tener sucesiones de muchas otras cosas, por ejemplo, de

- Números naturales
- Números reales
- Números complejos
- Triángulos
- Vértices de un polígono
- Funciones
- ¡Sucesiones!

Por ejemplo, una sucesión de triángulos puede ser $\{T_n\}$, en donde T_n es el triángulo equilátero de lado n. Una sucesión de funciones puede ser $\{f_n\}$ de modo que $f_n(x) = 2x + n$.

Hay dos tipos de sucesiones muy conocidas, las aritméticas y las geométricas. Veremos propiedades de estas sucesiones y problemas olímpicos relacionados con ellas en las siguientes secciones.

Por otro lado, hay algunas propiedades que pueden tener las sucesiones y que en algunos casos resultan útiles para resolver problemas olímpicos relacionados con sucesiones. Las que veremos en este curso son las siguientes:

- **Sucesiones periódicas.** Son aquellas sucesiones que “se repiten”.
- **Sucesiones acotadas.** Son aquellas que no se hagan ni muy grandes positivamente ni grandes negativamente.
- **Sucesiones monótonas.** Son sucesiónes que crecen siempre o decrecen siempre, quizás a veces quedándose igual.
- **Sucesiones recursivas.** Son sucesiones que para definir un término, es necesario conocer los anteriores.
- **Sucesiones convergentes.** Son aquellas sucesiones que cumplen con “acercarse” cada vez más a algún término específico.

1.2 Sucesiones Aritméticas

Una sucesión aritmética es una sucesión en la cual de un término al siguiente siempre hay una misma diferencia. Por ejemplo, en la sucesión $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, \ldots$, de un término al siguiente la diferencia siempre es tres. Al tomar un número inicial para la sucesión y la diferencia que queremos, la sucesión queda totalmente determinada.

En efecto, si tenemos un número inicial $a_0 = a$ y la diferencia es d, entonces el siguiente término es $a_1 = a + d$, el siguiente es $a_2 = a + 2d$, el siguiente es $a_3 = a + 3d$ y así sucesivamente. En general, se puede probar por inducción sobre n que $a_n = a + nd$.

Con esta fórmula podemos saber muchas cosas de las sucesiones aritméticas. Por ejemplo, si sabemos que $a_5 = 30$ y $a_7 = 48$ son términos de una sucesión aritmética, entonces $18 = 48 - 30 = a_7 - a_5 = (a + 7d) - (a + 5d) = 2d$, por lo cual podemos saber que la diferencia d es $\frac{18}{2} = 9$ y entonces $a_0 = a_5 - 5 \cdot 9 = 30 - 45 = -15$ es el término inicial.

Problemas

1. Una sucesión aritmética tiene $a_0 = 1$ y diferencia 7. Encuentra el valor de a_{289}.
2. Una sucesión aritmética cumple $a_{10} = 100$ y $a_{20} = 120$. ¿Cuánto vale a_{30}?
3. Sabemos que una sucesión artimética de enteros toma el valor 2011 y el valor 1999. ¿Cuáles son los posibles valores de la diferencia de la sucesión?
4. ¿Es posible encontrar una sucesión aritmética en la cual todos los números sean cuadrados perfectos distintos?
5. Muestra que si $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética de diferencia $d \neq 0$, entonces
   - $\frac{a_i + a_{i+2}}{2} = a_{i+1}$,
   - $a_{i-1}a_{i+1} + d^2 = a_i^2$ y
   - $\frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{d}(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}})$.
6. Se tienen 21 números enteros distintos entre 1 y 100. Muestra que hay dos con diferencia 1, 2, 3 ó 4.

7. Se tiene una sucesión aritmética $\{a_n\}$ de números enteros con diferencia positiva. Se sabe que se puede elegir uno de los números a_{11}, a_{12}, a_{13} y uno de los números a_{21}, a_{22} y a_{23} de modo que la diferencia entre estos dos números elegidos es múltiplo de 7. Encuentra el mínimo valor que puede tener la diferencia de esta sucesión aritmética.

8. Una sucesión aritmética $\{a_n\}$ de enteros cumple lo siguiente:

   - $1 \leq a_0 \leq 5$
   - $86 \leq a_{20} \leq 120$
   - a_{20} es múltiplo de 7

   Encuentra el valor de a_{10}.

9. $(\star)$ Un polinomio p cumple que $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $\ldots$ forman una sucesión aritmética. Muestra que p es el polinomio constante 0 o tiene grado menor o igual a 1.

1.3 Sucesiones Geométricas

Si tenemos una sucesión la cual para pasar de un término a otro siempre multiplicamos por un mismo número, entonces tenemos una sucesión geométrica. Las siguientes tres son ejemplos de sucesiones geométricas:

- $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
- $2011, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$
- $64, 96, 144, 216, 324, 486, 729, \frac{2187}{2}, \ldots$

En la primera, hay que multiplicar por 2, en la segunda por 0 y en la tercera por $\frac{3}{2}$. A este número que tenemos que multiplicar en cada paso se le conoce como la razón de la sucesión. Al igual que en las sucesiones aritméticas, al definir el término inicial de la sucesión y la razón, se determina totalmente la sucesión.

Concretamente, si el número inicial es $a_0 = a$ y la razón de la sucesión geométrica es r, entonces $a_1 = ra$, $a_2 = r^2a$ y un argumento inductivo muestra que $a_n = r^n a$.

Ojo: Cuando tenemos una sucesión en la cual siempre *dividimos* por un mismo número, entonces en realidad también tenemos una sucesión geométrica. Por ejemplo, si siempre dividimos entre 5, eso es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{5}$.

Problemas

1. **El truco de las geométricas:** Muestra que si $\{a_n\}$ es una sucesión geométrica con razón $r \geq 0$, entonces $a_i a_{i+2} = a_{i+1}^2$. ¿Qué pasa si $r < 0$, por ejemplo, si $r = -1$?

2. En una sucesión geométrica se cumple que hay uno de sus números que es 0. Muestra que la sucesión es de la forma $\{a, 0, 0, 0, 0, \ldots\}$.

3. La siguiente era una sucesión geométrica, pero se borraron algunos números:

$$27, ?, ?, 8, ?, ?, ?, x, \ldots$$

   ¿Cuál es el valor de x?

4. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ y $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Encuentra los primeros términos de $\{a_n\}$, encuentra un patrón para la fórmula y haz una prueba de que funciona.

5. Muestra que si $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética, entonces $\{2^{a_n}\}$ es una sucesión geométrica. ¿De qué razón? ¿Cómo puedes a partir de una sucesión geométrica obtener una sucesión aritmética?

6. Encuentra todas las posibles sucesiones que son a la vez aritméticas y geométricas.

7. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones geométricas, muestra que $\{a_n b_n\}$ también es una sucesión geométrica. ¿De qué razón?

8. Considera tres enteros positivos consecutivos. Deja el primero sin modificar. Súmale 10 al segundo. Súmale un primo p al tercero. Si quieres que los tres números así obtenidos estén en progresión geométrica, ¿qué primo p tuviste que elegir?

9. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_1 = 1$ y que $a_{n+1} = 3a_n + 7$. Encuentra una fórmula cerrada para $\{a_n\}$.

10. ($\star$) La sucesión $\{x_n\}$ es aritmética. La sucesión $\{y_n\}$ es geométrica. La sucesión $\{z_n\}$ cumple que $z_n = x_n + y_n$. Si $z_1 = 1$, $z_2 = 8$, $z_3 = 10$ y $z_4 = 32$, ¿cuál es el valor de z_5?

11. ($\star$) Sea p un polinomio. ¿Es posible que $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, $\ldots$, formen una sucesión geométrica? ¿Cuándo?

12. ($\star$)Los números a_1, a_2, $\ldots$, a_n están en progresión geométrica. Encuentra una fórmula para $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ en términos de $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ y $T = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$.

13. ($\star$)Sea x un número real.

    - Supongamos que existen tres enteros distintos a, b y c de modo que $x + a$, $x + b$ y $x + c$ están en progresión geométrica. ¿A partir de esto se puede deducir que x es racional?
    - Supongamos que x es racional. ¿Siempre existen tres enteros distintos a, b y c tales que $x + a$, $x + b$ y $x + c$ están en progresión geométrica?

1.4 Sucesiones Periódicas

A continuación se muestran algunas sucesiones con una característica peculiar:

- $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, \ldots,$
- $7, 8, 7, 11, 7, 7, 8, 7, 11, 7, 7, 8, 7, 11, 7, 7, 8, \ldots$
- $1, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 4, \ldots$
- $3, 7, 4, 7, 5, 2, 7, 5, 2, 7, 5, 2, 7, 5, 2, 7, 5, \ldots$

Tomemos un entero $p \geq 1$. Una sucesión $\{a_n\}$ es periódica de periodo p si se cumple que $a_{n+p} = a_n$ para toda n. Es decir, hay un número entero p tal que si nos recorremos p números en la sucesión, entonces tenemos el mismo valor. En los primeros tres ejemplos tenemos sucesiones periódicas de periodo 4, 5 y 6 respectivamente.

El cuarto ejemplo no es una sucesión periódica por que al principio tiene un comportamiento extraño. Sin embargo, a partir del quinto término se vuelve periódica. A este tipo de sucesiones se les llama preperiódicas.

Notemos que la primer sucesión también tiene periodo 8, pues si nos recorremos de 8 en 8 también se repite. El periodo mínimo de una sucesión es el menor p que es periodo.

Si una sucesión es periódica de periodo p entonces podemos conocer todos sus valores conociendo el valor de los p primeros. En efecto, si $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ es una sucesión de periodo p y tenemos un entero positivo n, entonces por el algoritmo de Euclides podemos escribir a n como $n = pq + r$ con r entre 1 y n. De esta forma, $a_n = a_r$.

Por ejemplo, como la sucesión $7, 8, 7, 11, 7, 7, 8, 7, 11, 7, 7, 8, 7, 11, 7, 7, 8, \ldots$ tiene periodo 5 y $73 = 5 \times 14 + 3$, entonces $a_{73} = a_3 = 7$.

Problemas

1. Se escribe la sucesión de números $2, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, \ldots$. ¿Cuál es el término en la posición 2011?

2. Una sucesión $\{a_n\}$ cumple que el primer término es 2012. Si un número es par, entonces el siguiente es la mitad de ese. Si es impar, entonces el siguiente es la suma de los dos anteriores. ¿Cuál es el número en la posición 2012?

3. Se escribe la sucesión de Fibonacci, pero en cada paso los números se reducen módulo 3. Muestra que la sucesión que se obtiene es periódica.

4.
   - Para q un entero positivo consideramos la sucesión $\{a_n\} = \{n - q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor\}$. Encuentra los primeros 10 términos de esta sucesión para $q = 3$.
   - Encuentra una fórmula cerrada para $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, \ldots$ en términos de la función $\lfloor x \rfloor$.
   - Encuenta los primeros 20 términos de la sucesión $\{1 + 2(-1)^n + 3i^n + 3(-i)^n\}$.
   - Encuentra una fórmula cerrada para la sucesión $1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, \ldots$ en términos de -1, 1, i y $-i$.

5. **Lema del periodo mínimo:** Muestra que si una sucesión tiene periodo p y periodo mínimo q, entonces q divide a p.

6. Tenemos una sucesión $\{a_n\}$ de reales. La sucesión $\{b_n\}$ está dada por $b_n = 0$ si a_n es racional y $b_n = 1$ si a_n es irracional. Sabemos que b_n es periódica de periodo 91 y periódica de periodo 55. Muestra que o todos los números de a_n son racionales, o todos son irracionales.

7. Muestra que si $\{a_n\}$ es periódica de periodo p y $\{b_n\}$ es periódica de periodo q, entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}$ es periódica. ¿Qué posibles periodos puede tener?

8. El número x se escribe en expansión decimal como $x = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots$, con a_n un dígito para cada n. Muestra que x es racional si y sólo si $\{a_n\}$ es preperiódica.

9. ¿Cuándo una sucesión geométrica es periódica? ¿Cuándo una sucesión aritmética es periódica?

10. ($\star$) Sea $k > 1$ un entero. Considera la sucesión $\{\cos(\frac{n\pi}{k})\}$. Muestra que esta sucesión es periódica.

11. ($\star$) Sea toma el número $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$, donde $a_n = 0$ si n es primo y $a_n = 1$ si no. Muestra que x es un número irracional.

12. ($\star$) Sea k un entero positivo y ω una solución de la ecuación $1 + x + \ldots + x^{k-1}$. Muestra que la sucesión $\{\omega^n\}$ es una sucesión periódica y que su periodo es un divisor de k.

13. ($\star$) Sea f una función. Decimos que x es un punto fijo de f si $f(x) = x$. La $m-$ésima iterada de f es la función $f^m(x) = f(f(f(\ldots f(x))))$, que consiste en aplicar f repetidamente m veces. Decimos que x es un punto periódico de periodo m si x es punto fijo de f^m. Muestra que si x es un punto periódico de f, entonces $\{f^n(x)\}$ es una sucesión periódica.

1.5 Sucesiones Acotadas

Hay sucesiones que no se alejan mucho de 0 ni para arriba ni para abajo. Veremos cómo expresar esto matemáticamente.

Diremos que una sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente si existe un número M que sea igual o le gane a todos los elementos de la sucesión, es decir, tal que $a_n \leq M$ para toda n. Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente si existe un número m tal que sea más pequeño o igual que todos los números de la sucesión, es decir, que $a_n \geq m$ para toda n. A M le llamamos una cota superior y a m le llamamos una cota inferior.

Si una sucesión está acotada superior e inferiormente, entonces simplemente diremos que está acotada.

Una sucesión puede o no tener a sus cotas. Por ejemplo, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ está acotada inferiormente por 0, pero 0 no está en la sucesión. Más aún, no hay ningún número mayor a 0 que sea cota de la sucesión. Tenemos que 2 es una cota superior, pues le gana a todos los números, sin embargo, no es la mejor cota superior que podemos tener. La mejor que podemos tener es 1 y de hecho ésta sí está en la sucesión.

Problemas

1. Determina si las siguientes sucesiones están acotadas:
   - $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$
   - $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}, \ldots$
   - $\{n + (-1)^n\frac{1}{n}\}$
   - $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, 0.999999, 0.9999999, \ldots$
   - ($\star$) $1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 3, \ldots$
   - ($\star$) $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}, \ldots$
   - ($\star$) $\log 1, \log 2, \log 3, \log 4, \log 5, \log 6, \log 7, \ldots$

2. Muesta que si $\{a_n\}$ es una sucesión periódica, entonces está acotada.

3. Muestra que una sucesión $\{a_n\}$ está acotada si y sólo si existe un número $M \geq 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para toda n.

4. Muestra que las sucesiones aritméticas con diferencia $d > 0$ están acotadas inferiormente, pero no superiormente. Del mismo modo, muestra que si $d < 0$, entonces están acotadas superiormente, pero no inferiormente. ¿Qué sucede con las sucesiones geométricas?

5. Muestra que si $\{w_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ son sucesiones acotadas, entonces $\{w_n^2+x_n^2+y_n^2+z_n^2\}$ tamién lo es. Concluye que si $\{w_n^2+x_n^2+y_n^2+z_n^2\}$ no es acotada, entonces alguna de $\{w_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ tampoco lo es.

6. Supongamos que para una sucesión $\{a_n\}$ se cumple que hay un número a para el cual $|a_n - a| < 1$ para toda $n > 100$. Muestra que a_n es acotada.

7. Muestra que si $\{a_n\}$ está acotada, entonces la sucesión $\{\frac{a_n}{n}\}$ se acerca a cero tanto como se quiera. Es decir, que para cualquier entero m existe un entero n con $|\frac{a_n}{n}| < \frac{1}{m}$. Muestra que esto no necesariamente es cierto si $\{a_n\}$ no es acotada.

1.6 Sucesiones Monótonas

Hay sucesiones tales que los números de la sucesión siempre van incrementando o bien van bajando. Por ejemplo, si tomamos la sucesión $9, 9.9, 9.99, 9.999, 9.9999, 9.99999, \ldots$, esta sucesión siempre va incrementando su valor. De modo similar, la sucesión aritmética $-1, -5, -9, -13, -17, -21, -25, \ldots$ siempre va decreciendo de valor.

Según si estas sucesiones crecen o decrecen les llamaremos de distinta manera. Para una sucesión $\{a_n\}$ tenemos lo siguiente.

- Diremos que es no decreciente si cada que $n > m$, entonces $a_n \geq a_m$.
- Diremos que es no creciente si cada que $n > m$, entonces $a_n \leq a_m$.
- Diremos que es estrictamente creciente si cada que $n > m$, entonces $a_n > a_m$.
- Diremos que es estrictamente decreciente si cada que $n > m$, entonces $a_n < a_m$.

A una sucesión que cumpla alguna de estas propiedades la llamaremos una sucesión monótona.

Truco: Para ver que una sucesión es no decreciente, basta ver que es no decreciente paso a paso, es decir, que para toda n se cumple que $a_{n+1} \geq a_n$.

Por supuesto, el truco anterior se vale también remplazando "no creciente" por cualquiera de los otros tres tipos de sucesiones monótonas. Esto es algo que nos pasará frecuentemente en los problemas que proponemos.

Problemas

1. Muestra que si $\{a_n\}$ está dada según las siguientes reglas, entonces es creciente

   - $a_n = \frac{n}{n+1}$
   - $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$
   - $a_n = \frac{1}{2^{1/n}}$

- $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
- $a_n = 2^n - \frac{1}{2^n}$
- $(\star)\ a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- $(\star)\ a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$, en donde hay n radicales.

2. Muestra que toda sucesión aritmética es monótona. ¿Qué sucesiones geométricas son monótonas?

3. Muestra que si $\{a_n\}$ es no decreciente, entonces $\{-a_n\}$ es no creciente. ¿Puedes garantizar que $\{-a_n\}$ sea decreciente?

4. Encuentra ejemplos de sucesiones estrictamente crecientes y acotadas. Encuentra ejemplos de sucesiones que no sean crecientes, pero sí acotadas.

5. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones estrictamente crecientes, entonces $\{a_n + b_n\}$ también lo es.

6. ¿Cuál es el valor máximo de $\frac{10^n}{n!}$? Esta es una sucesión que primero crece y a partir de un punto decrece. A estas sucesiones se les llama unimodales.

7. Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente de números positivos. Muestra que $\left\{\frac{a_n}{1+a_n}\right\}$ está acotada y es creciente.

8. **Reflexión:** ¿Qué le pasa a una sucesión que es no decreciente y acotada?

9. A partir de la sucesión $\{a_n\}$ se define la sucesión $\{b_n\}$ de modo que $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Muestra que la sucesión $\{b_n\}$ es creciente si y sólo si a_2, a_3, a_4, $\ldots$ son positivos.

10. Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ de números positivos es súper-creciente si para toda n se tiene que $a_{n+1} > a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Si $\{a_n\}$ es súper-creciente, ¿cuántas sumas distintas se pueden hacer con los elementos a_1, a_2, $\ldots$, a_n? Se puede tomar cualquier número de sumandos.

11. **Principio del descenso infinito:** Muestra que no existen sucesiones estrictamente decrecientes de números naturales. Concluye que cualquier sucesión de enteros no creciente y acotada inferiormente se vuelve constante a partir de algún término.

1.7 Sucesiones Recursivas

Una sucesión $\{a_n\}$ es recursiva si de alguna forma podemos encontrar nuevos términos viendo los términos anteriores. Esto lo podemos escribir como que existe alguna función, no muy difícil de describir, f tal que $a_{n+1} = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Si uno lo escribe así en general, parece una expresión muy complicada para lo que queremos. Sin embargo, en cada sucesión a veces es muy fácil decir quién es esta función f. Algunos ejemplos son los siguientes:

- Las sucesiones aritméticas de diferencia d cumplen la recursión $a_{n+1} = a_n + d$.

- Las sucesiones geométricas de razón r cumplen la recursión $a_{n+1} = ra_n$.

- La sucesión de Fibonacci está definida por $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ y por cumplir la recursión $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

- Podemos definir una sucesión de pentágonos como sigue. El pentágono C_1 es un pentágono regular de lado 1 y de ahí en adelante, el pentágono C_{n+1} es el pentágono formado por los puntos medios de C_n.

- La sucesión de los factoriales dada por $a_n = n!$ cumple que $a_0 = 1$ y la recursión $a_{n+1} = (n+1)a_n$.

Una recursión nos permite reconstruir una sucesión paso a paso. A veces, aunque sea difícil construir la sucesión completamente o encontrar una fórmula cerrada para la sucesión, tal vez sea posible decir algunas propiedades a partir de la recursión. Por ejemplo, si la recursión es $a_{n+1} = a_n^2 + n$, entonces la sucesión es creciente.

Problemas

1. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y que $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Encuentra el valor de a_{2011}.

2. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ y que $a_{n+1} = na_n + (n-1)a_{n-1} + \cdots + a_1 + 1$. Encuentra una fórmula para a_n.

3. Encuentra una fórmula cerrada para las sucesiones que cumplen las siguientes recursiones:

    - $a_n = 1 + a_{n-1}$ con $a_0 = 0$.
    - $a_n = \frac{n-1}{2n}a_{n-1}$ (para $n \geq 2$) en términos de a_1.
    - $a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{2}$ en términos de a_0.
    - $a_n = n^3 + a_{n-1}$ si $a_0 = 0$.
    - $a_n = 3a_{n-2}$ con $a_0 = 1$, $a_1 = 5$.

4. Las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ cumplen que $a_{n+1} = \frac{2a_n+b_n}{9}$, $b_{n+1} = \frac{a_n+2b_n}{9}$ y $a_0 = \frac{1}{3}$, $b_0 = \frac{2}{3}$. Encuentra una fórmula cerrada para $\{a_n\}$.

5. Los números $a_1, a_2, a_3 \ldots$ forman una sucesión de números de modo que $a_1 = 1$ y para $n > 1$ se cumple que $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n^2 a_n$. Encuentra a_{2010}.

6. Tomamos $f(x) = (\sqrt{x} - 3)^2$ y $g(x) = (\sqrt{x} - 33)^2$. Encuentra el valor de $f^{33}(10000)$ y de $g^{33}(10000)$.

7. Toma $a_0 = 7$ y $a_{n+1} = a_n + n$. Encuentra una fórmula cerrada para esta recursión.

8. Muestra que si a es un número real tal que $a + \frac{1}{a}$ es un número racional, entonces $a^n + \frac{1}{a_n}$ es un número racional para cualquier entero n.

9. ¿Cuántos números de 10 dígitos hay formados únicamente por dígitos 3 y 7 en los cuales no hay dos dígitos 7 juntos?

10. Encuentra una recursión que cumplan los números de la sucesión $\{1 + r + r^2 + \ldots + r^n\}$.

11. Para un triángulo T se define otro triángulo $f(T)$ como sigue:

    - Se nombren los vértices A, B C de modo que BC sea el lado más chico.

- Se considera el punto medio M de BC.
- Se rota el triángulo MAC alrededor de M en $180°$.

Muestra que tras hacer esta operación se vuelve a obtener un triángulo. Este nuevo triángulo es $f(T)$. Se considera una sucesión de triángulos recursivamente como sigue. Se toma un triángulo T. Se toma $T_0 = T$. Luego, se define $T_{n+1} = f(T_n)$. ¿Es posible que la sucesión $\{T_n\}$ tenga dos triángulos congruentes?

12. ($\star$) Encuentra una fórmula cerrada para la sucesión de Fibonacci.

13. ($\star$) Aplicar un *desliz* a un entero positivo $n \geq 5$ es cambiar a n por $\frac{n+p^2}{p}$ con p un divisor primo de n. Muestra que tras aplicar repetidamente deslices a un entero $n \geq 5$, siempre se llega a 5.

14. ($\star$) ¿Cuál es el término que sigue en la sucesión $1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, \ldots$?

15. ($\star$) Demuestra que para cualquier entero positivo n, el número $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ es un entero impar.

16. ($\star$) Para un entero positivo n llamamos $d(n)$ al producto de los dígitos de n. Por ejemplo, $d(2012) = 0$, $d(481) = 32$, $d(22223) = 48$. Para un número n consideramos la sucesión $n, d(n), d(d(n)), d(d(d(n))), \ldots$. Si alguno de estos términos es cero, entonces los siguientes también lo serán. ¿Siempre es cierto que a partir de un momento esta sucesión se hace cero?

17. ($\star\star\star$) **Ejemplo de Olimpiada Universitaria:** Sea f un polinomio con coeficientes reales. Se define una sucesión recursivamente por $f_0 = f$ y $f_{n+1} = f_n + f_n'$ (el polinomio más su derivada). Muesta que hay una M tal que si $n > M$, entonces f_n tiene todas sus raíces reales.

1.8 Sucesiones Convergentes

Una sucesión es convergente si "a partir de un momento se acerca tanto como queramos a un número". La definición formal de que una sucesión sea convergente no es un tema de la Olimpiada de Matemáticas, sin embargo, se enuncia a continuación como referencia.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ converge al número a si para toda $\epsilon > 0$ existe una M tal que $|a_n - a| < \epsilon$ para todos los n con $n > M$. Esto lo denotamos por $\{a_n\} \to a$. A a lo llamamos el límite de la sucesión. Aunque el tema de sucesiones convergentes no sea un tema de Olimpiada, muchas veces el saber si una sucesión converge o no, nos puede ayudar a comprender mejor cómo se comporta. Las siguientes son algunas de las propiedades de sucesiones convergentes más útiles:

- Si una sucesión converge, entonces el límite al que converge es único.
- Una sucesión monótona y acotada es convergente.
- Si una sucesión es convergente, entonces es acotada.
- Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen respectivamente a a y a b, entonces:
  - $\{a_n \pm b_n\} \to a \pm b$

- $\{a_n b_n\} \to ab$
- Si $b_n \neq 0$ para toda n y $b \neq 0$, entonces $\{\frac{a_n}{b_n}\} \to \frac{a}{b}$

- **Sandwich para sucesiones:** Si tres sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ cumplen que $\{a_n\} \to l$, $\{c_n\} \to l$, y para toda n se cumple $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces $\{b_n\} \to l$.
- Si f es una función contínua y $\{a_n\} \to a$, entonces $\{f(a_n)\} \to f(a)$.

Probar estas propiedades resulta ser un asunto técnico. Sin embargo, una vez que las probamos resultan ser fáciles de aplicar para resolver algunos problemas.

Problemas

1. Muestra que toda sucesión constante es convergente.
2. Encuentra todas las sucesiones aritméticas y geométricas que converjan.
3. Encuentra ejemplos de sucesiones que converjan pero que no sean monótonas.
4. Muestra que toda sucesión convergente está acotada.
5. Determina el límite de la sucesión $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$, en donde en a_n hay n radicales.
6. Muestra que la sucesión $\{a_n\} = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ converge a 0.
7. Determina el límite de la sucesión $a_n = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}$, en la cual en a_n hay n fracciones.
8. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_0 > 0$ y que $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Muestra que la sucesión no es acotada. **Sugerencia:** Muestra que si fuera acotada, entonces sería convergente e intenta encontrar el límite.
9. ($\star$) Muestra que en la sucesión del problema anterior se tiene que $a_{200} > 20$.
10. ($\star$) Se toman dos números positivos $a > b$. Se definen recursivamente las siguientes sucesiones:

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ b_0 &= b \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} &= \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \end{aligned}$$

    Muestra que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen, que convergen a un mismo número y determina el número al cual convergen.

11. ($\star$) Se toma un número $a > 0$. La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_0 = a$ y $a_{n+1} = |a_n - \frac{1}{n}|$. ¿A dónde converge esta sucesión?