VI Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2016
Segunda Etapa

Sábado 13 de agosto de 2016

Problema 1. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotadas de clase C^2 tales que $f''(x) \leq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Considera el conjunto de números $A = \{101, 102, 103, \ldots, 120\}$.

- Muestra que no hay dos números distintos en A cuyo producto sea un cuadrado perfecto.
- Muestra que hay al menos 16 formas distintas de escoger cuatro números de A de modo que su producto sea un número de la forma $a^2 - 5a + 4$ para a entero.

Problema 3. En un callejón viven 2016 gatos distintos. Quieren salir a cantar durante algunas noches bajo las siguientes reglas:

- Cada noche saldrá a cantar un conjunto de 6 gatos.
- Para noches distintas, los conjuntos de gatos o bien tienen 0 gatos en común, o bien tienen 5 gatos en común.

¿Cuál es el máximo número de noches que los gatos pueden cantar?

Problema 4. Para una pareja (a, b) de reales positivos construimos recursivamente las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ como sigue. Definimos $x_0 = y_0 = 1$, $x_1 = a$, $y_1 = b$ y para $n \geq 1$:

$$x_{n+1} = \left(\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}\right)^n \cdot x_n \qquad y_{n+1} = \left(\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\right)^n \cdot y_n.$$

Determina todas las parejas (a, b) para las cuales todos los números de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son enteros.

Problema 5. Considera un poliedro convexo $\mathcal{P}$ sin aristas paralelas y sin aristas paralelas a caras salvo a las dos que se es adyacente. Decimos que un par de puntos en $\mathcal{P}$ son *opuestos* si existen dos planos paralelos que contienen a los puntos y $\mathcal{P}$ se encuentra en la región entre los planos. Sea A la cantidad de pares distintos de vértices opuestos, B la cantidad de pares distintos de puntos opuestos que son puntos medios de aristas y V la cantidad de vértices. Muestra que

$$A - B = V - 1.$$

Problema 6. Determina todos los campos finitos F tales que el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \, a, b \in F, \{a, b\} \neq \{0\} \right\}$$

es un conjunto de matrices invertibles.

Solucionts

Problema 1. Evidentemente toda función constante es acotada, de clase C^2 y cumple que $f''(x) = 0 \leq 0$. Demostremos que las funciones constantes son las únicas con estas características.

En efecto, supongamos que f no es constante, entonces debe existir un punto x_0 tal que $f'(x_0) = c \neq 0$. Supongamos sin perder la generalidad que $c > 0$. En este caso, como $f'' \leq 0$, tenemos que f' es una función monónota decreciente y por lo tanto $f'(x) \geq c = f'(x_0)$ para toda $x \leq x_0$. De esta manera, si $x \leq x_0$ tenemos que

$$f(x_0) - f(x) = \int_x^{x_0} f'(t)dt \geq \int_x^{x_0} cdt = c(x_0 - x),$$

y por lo tanto $f(x) \leq f(x_0) - c(x_0 - x)$. Así,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \leq \lim_{x\to-\infty} f(x_0) - c(x_0 - x) = -\infty$$

lo cual contradice la hipótesis de que f es acotada. Un razonamiento análogo nos permite eliminar el caso en el que $c < 0$. Así inferimos que $f' = 0$ lo cual implica que f es constante.

Problema 2. Procedamos por contradicción. Supongamos que hay dos números $a < b$ en A cuyo producto es un cuadrado perfecto. Entonces deben existir enteros $x < y$, y un entero z libre de cuadrados para los cuales $a = zx^2$, $b = zy^2$. De la cadena de desigualdades $10^2 < zx^2 < zy^2 < 11^2$ obtenemos que

$$\frac{10}{x} < \sqrt{z} < \frac{11}{y}.$$

De lado izquierdo obtenemos $10 < x\sqrt{z}$. Combinando esto con el lado derecho obtenemos

$$y\sqrt{z} < 11 = 10 + 1 < x\sqrt{z} + 1$$

.

Así, tenemos que $(y - x)\sqrt{z} < 1$. Esta desigualdad es imposible, pues como x y y son enteros, $y \geq x + 1$ y además $\sqrt{z} \geq 1$. $\square$

Para resolver este inciso, usaremos la siguiente identidad:

$$(b-2)(b-1)(b+1)(b+2) = (b^2-1)(b^2-4) = b^4 - 5b^2 + 4.$$

Notemos que el número a la derecha es de la forma $a^2 - 5a + 4$ para $a = b^2$. Para encontrar las 16 cuartetas, basta tomar $b = 103, 104, \ldots, 118$.

Problema 3. Daremos dos soluciones de este problema

Solución 1. El máximo es 2016. Para el ejemplo, agrupamos a los 2016 elementos en 288 clases de 7 elementos. De cada clase elegimos sus 7 subconjuntos de 6 elementos. Así, cada par de 6-conjuntos se intersecta en 0 o 5 elementos.

Veamos que este es el máximo. Supongamos que tenemos una familia F de 6-conjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2016\}$ válida. A cada 6-conjunto le asignaremos un vector en el espacio vectorial $\mathbb{Z}_5^{2016}$. Al 6-conjunto f, le asignamos el vector característico de f, es decir, aquel que tiene 1 en las coordenadas j tales que j está en f y cero en las demás entradas (es decir, cada uno de estos vectores tiene 6 unos, y sus demás entradas son ceros).

Notemos que para dos 6-conjuntos f y g tenemos que el producto punto de v_f con v_g es $|f \cap g|$ reducido módulo 5. Si $f = g$, este producto punto es 1. Si $f \neq g$, por la hipótesis $|f \cap g|$ es múltiplo de 5, y por lo tanto el producto punto es 0.

Esto quiere decir que $\{v_f\}_{f \in F}$ es un conjunto de vectores ortogonales, y por lo tanto linealmente independientes. Así:

$$|T| = |\{v_f\}_{f \in F}| \leq \dim(\mathbb{Z}_5^{2016}) = 2016.$$

Esto termina la prueba.

Solución 2. El ejemplo se da de la misma manera que en la solución oficial.

Para ver que 2016 es el máximo, veremos que cualquier otra opción tiene igual o menos noches. Supongamos que de alguna manera, los gatos se organizaron y cantaron m noches distintas. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos de gatos que salieron a cantar. Evidentemente $|\mathcal{F}| = m$. Diremos que dos subconjuntos de $\mathcal{F}$ están relacionados si tienen gatos en común. Es fácil probar que esta relación es de equivalencia y por lo tanto $\mathcal{F}$ se descompone en clases de equivalencia, digamos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_k$. Para cada $i = 1, \ldots, k$ definamos

$$n_i := \left| \bigcup_{G \in \mathcal{F}_i} G \right|.$$

Como la relación es de equivalencia, inferimos que $2016 \geq \sum_{i=1}^{k} n_i$. Por otro lado, dada una clase de equivalencia $\mathcal{F}_i$, sólo puede pasar una de las siguientes dos opciones:

1. No hay tres subconjuntos de gatos que tengan cinco elementos en común. En este caso $n_i = 6$ (y por lo tanto $|\mathcal{F}_i| = 1 \leq n_i$) o $n_i = 7$ (y por lo tanto $|\mathcal{F}_i| \leq 7 = n_i$). Lo anterior se debe al siguiente hecho, si los conjuntos $G_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $G_2 = \{a, b, c, d, e, g\}$ pertenecen a $\mathcal{F}_i$, entonces cualquier otro subconjunto G_3 debe tener cinco elementos de G_1 y cinco elementos de G_2. Como no hay tres conjuntos con cinco gatos en común, concluímos que $G_3 \subset \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

2. Hay tres subconjuntos de gatos con cinco elementos en común. Si esto sucede cualquier otro miembro de $\mathcal{F}_i$ debe tener a los mismos 5 gatos en común. En efecto, si $G_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$, $G_2 = \{a, b, c, d, e, g\}$ y $G_3 = \{a, b, c, d, e, h\}$ son elementos de $\mathcal{F}_i$ y hubiera un cuarto subconjunto G_4 que no contenga al conjunto $\{a, b, c, d, e\}$, entonces podríamos suponer (sin perder generalidad) que es de la forma $G_4 = \{a, b, c, d, f, x\}$ (ya que la intersección con G_1 debe tener cinco elementos). Como la intersección con G_2 también debe tener cinco elementos y e no es elemento de G_2, concluímos que $x = g$. Pero en este caso la intersección de G_4 y G_3 tendría cardinalidad 4, lo cual es imposible.

   Del argumento anterior concluímos que $|\mathcal{F}_i| = n_i - 5$

En cualquier caso $|\mathcal{F}_i| \leq n_i$ y por lo tanto

$$m = |\mathcal{F}| = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{F}_i| \leq \sum_{i=1}^{k} n_i \leq 2016.$$

Problema 4. Vamos a introducir una sucesión auxiliar $\{z_n\}$ que definimos recursivamente como $z_1 = z_2 = 1$ y para $n \geq 1$, se define $z_{n+1} = n(1 - 2z_{n-1}) + z_n$.

Las siguientes dos igualdades se pueden probar (conjuntamente) para $n \geq 1$ mediante un argumento inductivo estándar:

$$x_n = a^{z_n} b^{1-z_n} = b\left(\frac{a}{b}\right)^{z_n} \qquad y_n = a^{1-z_n} b^{z_n} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{z_n}.$$

Si la pareja es de la forma (a, a) con a entero entonces por las expresiones anteriores tenemos que $x_n = y_n = a$ para toda n, de modo que estas parejas funcionan. Veamos que son las únicas.

Primero, notemos que en particular a y b tienen que ser enteros pues son respectivamente x_1 y y_1.

Para demostrar que $a = b$, vamos a estudiar más a detalle la sucesión $\{z_n\}$. Nos interesan las siguientes propiedades:

- **$\{z_n\}$ es una sucesión de enteros**. Esto se sigue inductivamente de que z_1 y z_2 lo son, y de la recursión.

- **La imagen de $\{z_n\}$ no es finita**. Para ver esto procedamos por contradicción. Supongamos que la sucesión toma sólo una cantidad finita de valores. De esta forma, hay una cantidad finita de ternas de la forma (z_{i-1}, z_i, z_{i+1}), y por lo tanto existen índices $i \neq j$ para los cuales estas ternas coinciden. Sin embargo, usando la recursión tendríamos:

  $$i(1 - 2z_{i-1}) = z_{i+1} - z_i = z_{j+1} - z_j = j(1 - 2z_{j-1}) = j(1 - 2z_{i-1})$$

  lo cual implica que $(i - j)(1 - 2a_{i-1}) = 0$. Pero esto es imposible pues $i \neq j$ y $1 - 2a_{i-1}$ no es cero pues es un entero impar.

- **En la sucesión $\{|z_n|\}$ hay valores arbitrariamente grandes** De no haberlos, la imagen de $\{z_n\}$ sería acotada, y en particular finita. Esto contradice el punto anterior.

Ahora sí, regresemos a la solución del problema original. Supongamos que $a < b$ (el otro caso es análogo). Por lo que estudiamos arriba, la sucesión $\{z_n\}$ tiene o bien valores positivos arbitrariamente grandes, o bien valores negativos arbitrariamente grandes. Todavía no sabemos cuál, pero no importa, esto es suficiente para terminar el problema.

- Si $\{z_n\}$ tiene valores positivos arbitrariamente grandes, entonces tomemos n de modo que $b\left(\frac{a}{b}\right)^{z_n} < 1$. De esta forma, x_n está entre 0 y 1 y por lo tanto no es entero.

- Si $\{z_n\}$ tiene valores negativos arbitrariamente grandes, entonces tomemos n de modo que $a\left(\frac{b}{a}\right)^{z_n} < 1$. De esta forma, y_n está entre 0 y 1 y por lo tanto no es entero.

En cualquiera de los dos casos, hemos mostrado que alguna de las sucesiones tiene valores entre 0 y 1, y por lo tanto no pueden consistir únicamente de enteros. De esta forma, las únicas soluciones posibles son de la forma (a, a) con a un entero.

Problema 5. Denotemos por n_E el numero de aristas y por n_F el número de caras del poliedro $\mathcal{P}$. También denotemos por $O(V, V)$ el conjunto de pares ordenados de vértices que son opuesto, $O(V, E)$ el conjunto de pares ordenados de puntos opuestos con el primero un vértice y el segundo el punto medio de una arista, $O(V,F)$ el conjunto de pares ordenados (v,C) (con v un vértice y C una cara de $\mathcal{P}$) tales que que el plano paralelo a C que pasa por v deja en el mismo semiespacio al poliedro $\mathcal{P}$ y por último $O(E,E)$ el conjunto de pares ordenados de puntos medios de aristas que son opuestos.

Tomemos un vértice fijo v y contemos la cantidad vértices opuestos a v de la siguiente manera: sea V_v el conjunto de vértices opuestos a v, entonces V_v forma una gráfica G_v con aristas las aristas de $\mathcal{P}$, notemos que G_v es una gráfica plana por ser subgráfica de $\mathcal{P}$, entonces podemos aplicar la formula de Euler y obtener que

$$|V_v| = 1 + E(G_v) - F(G_v).$$

Sumando esto para cada v obtenemos que

$$|O(V,V)| = |V| + |O(V,E)| - |O(V,F)|. \tag{1}$$

Por otro lado haciendo un razonamiento análogo para un arista fija e obtenemos un conjunto V_e de vértices opuestos a e y una gráfica G_e plana, entonces

$$|V_e| = 1 + |E(G_e)| - |F(G_e)|.$$

Sin embargo, como no hay una arista paralela a otra cara, la grafica G_e no tiene cíclos y por lo tanto $|F(G_e)| = 0$. Sumando sobre todas las aristas obtenemos.

$$|O(V,E)| = n_E + |O(E,E)| \tag{2}$$

Combinando (1) y (2) obtenemos que

$$2A = V + n_E - n_F + 2B$$

pero de nuevo por Euler $V + n_E - n_F = 2V - 2$ de donde se obtiene que $2A - 2B = 2V - 2$.

Problema 6. Sabemos que una matriz es invertible si y sólo si su determinante no es cero, entonces buscamos los campos F tales que

$$a^2 + b^2 \neq 0.$$

Notemos que $a^2 + b^2 = 0$ es equivalente a $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = 0$ o $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1 = 0$, por lo tanto el campo F no cumple lo deseado si $x^2 + 1$ tiene una raíz.

Sea F un campo talque $x^2 + 1$ tiene una raiz y sea F_p su campo característico. Si $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod 4$ sabemos que -1 es residuo cuadratico modulo p por lo tanto cualquier F con campo carasteristico F_2 o F_p con $p \equiv 1 \pmod 4$ satisface que $x^2 + 1$ tiene una raíz.

Ahora sea F con campo característico F_p con $p \equiv 3 \pmod 4$ y donde $x^2 + 1$ tiene raíz. Como existe un $\alpha \in F$ tal que $\alpha^2 = -1$ se tiene que $F_p(\alpha)/F_p$ es extensión de dimensión 2 por lo tanto $[F : F_p] = [F : F_p(\alpha)][F_p(\alpha) : F_p] = 2[F : F_p(\alpha)]$, luego F es una extension de dimesión par sobre F_p.

Veamos que si F/F_p es extensión de dimensión par sobre F_p entonces por el teorema fundamental de la teoría de Galois existe una extensión K/F_p intermedia de dimensión dos. Luego $|K^*| = p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 4$ y además es un grupo cíclico. En particular existe $\beta \in K^*$ talque $\beta^4 = 1$ con $\beta \neq -1, 1$, por lo tanto $\beta^2 + 1 = 0$ y entonces $x^2 + 1$ tiene una raíz en F.

Con lo anterior se tiene que x^2+1 no tiene raiz si y sólo si F tiene campo característico F_p con $p \equiv 3 \pmod 4$ y la extensión F/F_p es de dimensión impar, lo cual es equivalente a que F es un campo de tamaño p^n con $p \equiv 3 \pmod 4$ y n impar (pues los campos finitos de orden p^n siempre existen y son únicos salvo isomorfismo). el problema, apliquemos el lema de la siguiente manera: sea $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\varepsilon > 1$, entonces aplicando el lema n veces a cualquier intervalo $[x, y]$, obtenemos en algún momento un subintervalo $[x', y']$ de longitud almenos $\delta^n|y-x|$ tal que la pendiente de la recta entre $(x', f(x'))$ y $(y', f(y'))$ es al menos $n\varepsilon > 1$ o $\forall z \in [x', y']$ se tiene que $|\alpha_{(x',y')}(z) - f(z)| < \varepsilon|x'-y'|$, como la primera es absurda pues las pendientes están acotadas por uno, debe ocurrir la segunda. Empezando con este proceso para todo el intervalo obtenemos $[x_1, y_1]$; un intervalo de longitud al menos k donde la gráfica se queda metida en la bara de radio ε al rededor de la función lineal, repitiendo esto para $[0, x_1]$ y $[y_1, 1]$ obtenemos un nuevo par de intervalos $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$ de tamaño al menos kx_1 y $k|1-y_1|$, repitiendo este proceso podemos obtener una cantidad numerable de intervalos, de forma que lo que falta cubrir del intervalo tiene medida de Lebesgue menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ (pues siempre vamos quitando medida positiva acotada inferiormente por una constante), en este punto tomamos los rectángulos que cubren cada imagen de la función en estos intervalos y en los demás puntos usamos una familia numerable de rectángulos de la forma $[a_i, b_i] \times [-1, 1]$. Entonces la construcción es tal