

VIII Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2018

Primera Etapa

Problema 1. Un triángulo equilátero es cortado tal y como se muestra en la Figura 1, para formar la Figura 2. ¿Qué forma tiene la Figura 2?

- (a) Un cuadrado (b) Un rectángulo (c) Un rombo (d) Ninguna de las anteriores

Problema 2. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(x + g(y)) = -x + y + 1$ para cada par de reales x y y . ¿Cuál es el valor de $g(x + f(y))$?

- (a) $x + y - 1$ (b) $x - y + 1$ (c) $-x + y + 1$ (d) $-x + y - 1$

Problema 3. ¿Cuántas permutaciones a_1, a_2, a_3, a_4 de $1, 2, 3, 4$ cumplen que para cada $k \in \{1, 2, 3\}$ la lista a_1, \dots, a_k contiene un número mayor que k ?

- (a) 10 (b) 11 (c) 13 (d) 15

Problema 4. Cada elemento a de un grupo G satisface $a^2 = e$ donde e es el elemento identidad. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es siempre cierta para un grupo G con la propiedad anterior?

- (a) G es conmutativo
(b) G tiene orden infinito o par
(c) G es Noetheriano
(d) G es espacio vectorial sobre \mathbb{Z}_2

Problema 5. Considera el conjunto

$$A = \left\{ \frac{j}{4} + \frac{100}{j} : j = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

¿Cuál es el número mas pequeño en A ?

- (a) 2 (b) 5 (c) 10 (d) 20

Problema 6. Dado un triángulo equilátero ABC en el plano, ¿cuántos puntos P en el plano cumplen que los tres triángulos APB , BPC y CPA son isósceles no degenerados?

- (a) 1 (b) 4 (c) 7 (d) 10

Problema 7. ¿Cuántas gráficas simples de 4 vértices existen, salvo isomorfismo?

- (a) 4 (b) 5 (c) 9 (d) 11

Problema 8. Un estudiante va a presentar un examen en el que tiene que resolver 3 problemas tomados aleatoriamente de una lista de 10 problemas posibles. Si resuelve correctamente 2 problemas, aprueba el examen. De la lista de 10, el estudiante sabe resolver 5 y no los demás. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen?

- (a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

Problema 9. ¿Cuántas funciones $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ cumplen que

$$f(f(x)) = f(f(f(x)))$$

para todo $x \in \{1, 2, 3\}$?

- (a) 12 (b) 10 (c) 9 (d) 6

Problema 10. ¿Cuántas parejas de números reales (a, b) cumplen que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{e^{ax} - 2bx - 1} = \frac{1}{2} ?$$

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) una infinidad

Problema 11. Considera la familia \mathcal{F} de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen, para cualquier par de números reales x y y distintos, la siguiente condición:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f' \left(\frac{x + y}{2} \right).$$

¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

- (a) \mathcal{F} es la familia de todas las funciones constantes
(b) \mathcal{F} es la familia de todos los polinomios
(c) Todas las funciones de \mathcal{F} son de clase C^∞
(d) Todas las funciones de la familia \mathcal{F} son de la forma $f(x) = ax + b$

Problema 12. Sea ABC un triángulo equilátero. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un punto P dentro de ABC uniformemente, las longitudes de las proyecciones desde P a los lados sean las longitudes de los lados de un triángulo?

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{4}$

Problema 13. Una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que $f(x)f(f(x)) = 1$ para cualquier real x y que $f(2019) = 2020$. ¿Cuál es el valor de $f(2018)$?

- (a) $\frac{1}{2018}$ (b) $\frac{1}{2020}$ (c) 2019 (d) 2018

Problema 14. ¿Cuál es el promedio de todos los valores

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$$

donde a_1, a_2, a_3, a_4 es una permutación de los números $\{1, 2, 3, 4\}$?

- (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{10}{24}$ (c) $\frac{10}{3}$ (d) 3

Problema 15. Un número real a es seleccionado de forma aleatoria y uniforme en el intervalo $[-3, 4]$. ¿Cuál es la probabilidad de que las raíces del polinomio $x^3 + ax^2 + ax + 1$ sean todas reales?

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{7}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{1}{3}$

Problema 16. Un entero positivo escrito en base 10 de al menos dos dígitos es *ascendente* si los dígitos de izquierda a derecha van creciendo, por ejemplo 235 es ascendente pero 132 y 122 no son ascendentes. ¿Cuántos números ascendentes hay? (a) 502 (b) 503 (c) 511 (d) 513

Problema 17. En el siguiente diagrama, un semicírculo es doblado a lo largo de una cuerda AN e intersecta el diámetro MN en B . Se sabe que $MB : BN = 2 : 3$ y $MN = 10$. Si $AN = x$, ¿cuál es el valor de x^2 ?

- (a) 72 (b) 80 (c) 100 (d) 144

Problema 18. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cuántos naturales n cumplen que existe una matriz real X tal que $X^n = A$?

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) una infinidad

Problema 19. ¿Cuál es la máxima cantidad de soluciones complejas que puede tener un sistema de la forma

$$\begin{aligned} |z - 1||z + 1| &= 1 \\ \operatorname{Im}(z) &= b, \end{aligned}$$

en donde b es un parámetro real del sistema?

- (a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 20. ¿Cuál es la mayor cantidad de puntos que pueden estar en el plano de manera que cada distancia entre dos de ellos sea un entero impar?

- (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Problema 21. Considera $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$ un polinomio de coeficientes reales positivos de grado $n \geq 2$, tal que sus n raíces son reales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre cierta?

- (a) $p(2) < 2(2^{n-1} + 1)$ (b) $p(1) < 3$ (c) $p(1) \geq 2^n$ (d) $p(3) < 3(2^{n-1} - 2)$

Problema 22. ¿Cuál es el valor de la integral impropia $\int_0^\pi \log(\sin(x))dx$?

- (a) $\pi \log 2$ (b) $\log 2$ (c) $-\log 2$ (d) $-\pi \log 2$

Problema 23. ¿Cuántos números primos p hay que cumplan que $p^3 - 4p + 9$ es un cuadrado perfecto?

- (a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 7

Problema 24. ¿Cuál es el valor de la serie

$$\sum_{1 \leq l < m < n} \frac{1}{5^l 3^m 2^n} ?$$

(a) $\frac{1}{30}$

(b) $\frac{1}{145}$

(c) $\frac{84}{29}$

(d) $\frac{29}{30}$

Problema 25. Sea A el grupo de automorfismos de \mathbb{Z}_{10} , es decir,

$$A = \{\varphi : \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_{10} \mid \varphi \text{ es automorfismo}\}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

(a) El orden de A es par

(b) A es abeliano

(c) Existe φ en A con orden impar

(d) $A \times A$ no es cíclico