Misterios de las profundidades
Día 1

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Luis Miranda Olvera

12 de junio de 2017

1. Introducción

Antes de comenzar recordemos algunas definiciones, para ellas tomememos V un espacio vectorial. Para nuestros fines tomemos $V = \mathbb{R}^d$.

Definición 1. *Decimos que un conjunto $X \subseteq V$ es convexo si dados cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ el segmento que une a dichos puntos se queda totalmente contenido en X, es decir, si para cualesquiera $x, y \in X$*

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\} \subseteq X.$$

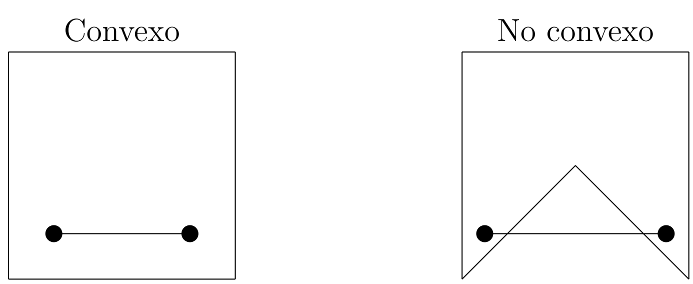

Figura 1: Diferencia entre una figura convexa y una no convexa.

Ejercicios 2.

- *Demuestra que* $\emptyset, \mathbb{R}^d$ *son convexos.*

- *Demuestra que el primer cuadrante de* $\mathbb{R}^2$ *es convexo.*

- *Demuestra que todo polígono convexo (con cada uno de sus ángulos internos menor a* $180°$*) es un conjunto convexo.*

- *Demuestra la intersección de una familia de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*

Definición 3. *Dados* $x_1, x_2, \cdots, x_n \in V$ *una combinación afín de dichos puntos es una combinación lineal de la forma*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Diremos que dichos puntos son afínmente dependientes si existen reales $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *no todos cero, tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

Equivalentemente, si alguno de ellos puede escribirse como combinación afín de los otros.

Una combinación convexa de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *es una combinación afín en la cual pedimos que todos los escalares sean no negativos.*

Ejercicios 4.

- *Demuestra que un conjunto de puntos son afínmente independientes si y sólo si uno de ellos puede escribirse como combinación afín de los otros.*

- *Un conjunto es convexo si y sólo si contiene a todas las combinaciones convexas de los puntos en el conjunto.*

Definición 5. *Definimos la envolvente convexa de un conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}^d$ *como el mínimo convexo que contiene a* X*, denotaremos a la envolvente como* $\operatorname{conv}(X)$*.*

Ejercicio 6. *Muestra que*

$$\operatorname{conv}(X) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i, x_i \mid n \in \mathbb{N}_{>0},\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0,1],\ x_1, \cdots, x_n \in X\}.$$

2. Lema de Radón y Teorema de Helly

Lema 7 (Lema de Radón)**.** *Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^d$, con $n \geq d+2$. Existe una bipartición del conjunto de puntos y otro punto en $\mathbb{R}^d$ tal que dicho punto se puede ver como combinación convexa de cada una de las dos particiones.*

Demostración. Dados m puntos afínmente independientes, estos generan un espacio afin de dimensión $m-1$. Como $n \geq d+2$ y el espacio es de dimensión d, estos puntos son afínmente dependientes. Para la prueba utilizaremos sólo los primeros $d+2$ puntos. Existen escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_d + 2$ no todos cero que satisfacen

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

Sean $C_1 = \{i \in \{1, 2, \cdots, d+2\} \mid \lambda_i \geq 0\}$ y $C_2 = \{i \in \{1, 2, \cdots, d+2\} \mid \lambda_i < 0\}$. Obsérvese que

$$\sum_{i \in C_1} \lambda_i x_i = \sum_{j \in C_2} -\lambda_j x_j \quad \text{y} \quad \Lambda = \sum_{i \in C_1} \lambda_i = \sum_{j \in C_2} -\lambda_j > 0.$$

Por lo que, al dividir la primera expresión entre Λ, obtenemos el resultado buscado.

Para el caso general, tomamos $C_1' = C_1 \cup \{d+3, \cdots, n\}$ y asignamos a cada uno de los nuevos puntos el escalar 0. □

Observemos que si tenemos $d+1$ puntos en $\mathbb{R}^d$, estos pueden ser afínmente dependientes (por ejemplo, tomar el vector $\overline{0}$ y los d vectores canónicos), y por tanto no pueden partirse en dos conjuntos cuyas envolventes convexas se intersecten.

Ejercicios 8.

- *Demuestra que dados un conjunto de segmentos en $\mathbb{R}$ (los cuales son convexos) tales que se intersecten por parejas, entonces, todos los segmentos se intersectan.*

- *Prueba que podemos tener tres conjuntos convexos en $\mathbb{R}^2$ (por ejemplo círculos) que tienen intersección vacía, pero que cumplen que se intersectan dos a dos.*

- *¿Será posible encontrar convexos en $\mathbb{R}^2$ que se intersecten por tercias pero que no se intersecten todos?*

Teorema 9 (Teorema de Helly)**.** *Dados $C_1, C_2, \cdots, C_n \subseteq \mathbb{R}^d$ conjuntos convexos con $n \geq d+1$ tales que cualesquiera $d+1$ de los conjuntos tienen un punto en común, entonces todos los conjuntos tienen un punto en común.*

Si en lugar de tener una cantidad finita de conjuntos en $\mathbb{R}^d$ tenemos una cantidad infinita, el resultado sigue siendo válido si pedimos que los conjuntos además sean compactos.

Demostración. Probaremos el teorema por inducción sobre n ($n \geq d+1$). El caso base $n = d+1$ es trivial. Supongamos la afirmación como válida hasta $n \geq d+1$. Ahora veamos el caso $n+1$. Para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$ por hipótesis de inducción existe un punto $x_i \in \bigcap_{i=1 i\neq j}^{n+1} C_i$ (este podría no pertenecer a C_j). Por el Lema de Radón existe una bipartición de $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}\}$, digamos A y B tal que $\text{conv}(A) \cap \text{conv}(B) \neq \emptyset$. Sea $y \in \text{conv}(A) \cap \text{conv}(B)$, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$:

- si $x_i \in A$, entonces para todo $x \in B$ tenemos que $x \in C_i$ y $y \in \text{conv}(B) \subseteq C_i$;
- mientrás que si $x_i \in B$, entonces para todo $x \in A$ tenemos que $x \in C_i$ y $y \in \text{conv}(A) \subseteq C_i$.

De lo cual deducimos que $y \in \bigcap_{i=1}^{n+1} C_i$. □

Problemas

1. Dados n puntos en el plano tales que cualesquiera tres de ellos están contenidos en un circulo de radio 1, prueba que todos ellos están contenidos en un mismo circulo de radio 1.

2. Teorema de Jung. Si tenemos n puntos en el plano que distan a lo más 1 por parejas, entonces todos están contenidos en un circulo de radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Helly para cajas. Sea F una familia de cajas en $\mathbb{R}^d$ de lados paralelos a los ejes (producto cartesiano de d intervalos cerrados). Supongamos que se intersectan de dos en dos. Muestra que todas se intersectan.

4. a) Dados n puntos en el plano, muestra que existe un punto $q \in \mathbb{R}^2$ tal que cualquier recta $\mathfrak{m}$ que pasa por q deja al menos la tercera parte de los puntos de cada lado (incluyendo los que están sobre la recta).
   b) Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto convexo y compacto. Demuestra que existe un punto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que cualquier recta $\mathfrak{m}$ que pasa por p divide el área de K dejando al menos la tercera parte de cada lado.

5. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto y convexo. Muestra que existe un punto $q \in \Omega$ tal que cualquier cuerda (segmento que uno dos puntos de la frontera) de Ω que pasa por q es dividida en dos parte de longitud mayor o igual a $\frac{1}{3}$ de la longitud total de la cuerda.

6. Dados n segmentos en el plano, todos paralelos al eje y y tales que no hay dos de ellos con la misma coordenada en x, demuestra que si para cualesquiera tres de ellos existe una recta que intersecta a los tres, entonces existe una recta que interesecta a todos los segmentos.

7. Sea $\mathscr{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ un polìgono que cumple que para cualesquiera tres puntos a, b, c en $\mathscr{P}$ existe un punto $m \in \mathscr{P}$ tal que los segmentos $\overline{am}, \overline{bm}, \overline{cm}$ están contenidos en $\mathscr{P}$. Prueba que existe un punto $q \in \mathscr{P}$ que satisface que el segmento $\overline{xq} \subset \mathscr{P}$ para todo $x \in \mathscr{P}$.

Hints

1. Toma tres de los puntos y analiza el centro del triángulo que los contiene. Toma circulos de radio 1 alrededor de cada uno de los puntos originales.

2. Dados tres puntos calcula la distancia máxima del circunradio del triángulo que determinan. Puedes clasificar estos triángulos según sus ángulos.

3. Proyecta la familia en cada uno de los ejes y usa el teorema de Helly en R.

4. Ambos problemas son muy similares. Dada una dirección fija en el plano, muestra que el conjunto de puntos por los cuales podemos pasar una recta ortogonal a la dirección dada tal que divide a los puntos (o el

área) en al menos la tercera parte de cada lado es un convexo. Muestra que para cualesquiera tres direcciones estos conjuntos se intersectan. Acota la región en la que se interesectan para usar la versión de Helly con compactos.

5. Para cualquier punto en la frontera la homotecia con centro en dicho punto y razón $\frac{2}{3}$ produce un nuevo convexo compacto, muestra que cualesquiera tres de estas figuras se intersectan. Recuerda que el baricentro de un triángulo divide a las medianas en razón $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

6. Para cada segmento $h = \{x_h\} \times [y_h, y'_h] \subset \mathbb{R}^2$, considera el conjunto $A_h = \{(m, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{la recta } y = mx + b \text{ interesecta a } h\}$. Demuestra que A_h es convexo y usa Teorema de Helly.

7. Si no existiera tal punto, entonces para todo punto $q \in \mathscr{P}$ existe otro punto x tal que el segmento $\overline{xq}$ pasa por el exterior del polígono, y por tanto cruza transversalemnte alguno de los lados. Para cada lado del polígono prolonga el segmento para formar una recta, este determina dos semiplanos, uno de los cuales ve hacia el interior del polígono y el otro que ve hacia el exterior del mismo con respecto a dicho lado. Muestra que la intersección de los semiplanos que ven hacia el interior del polígono con respecto a cada lado es no vacía.

Soluciones

1. Para cada punto toememos el círculo de radio 1 centrado en en dicho punto. Como para cualesquiera tres puntos existe un círculo de radio 1 que los contiene, en particular, el centro de dicho círculo dista menos de 1 de cada uno de los tres puntos y se encuentra en los círculos descritos incialmente, es decir, cualesquiera tres de los círculos que construímos se intersectan. Los círculos son convexos, por lo tanto, usando el Teorema de Helly tenemos que todos los círculos se intersectan, y este punto de intersección sirve como el centro de un nuevo círculo de radio 1 que contiene a todos los n puntos.

2. Sean $_1, x_2, \cdots, x_n$ los n puntos, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sea C_i el círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y centro en x_i. Demostremos que cualesquiera tres de estos círculos se intersectan, para ello veamos que dados cualesquiera tres puntos, estos están contenidos en un círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dados $i, j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ distintos, tomemos el triángulo formado por estos

tres puntos. Sin pérdida de generalidad supongamos que el ángulo en x_i es el mayor. Si dicho ángulo es mayor o igual a $\frac{\pi}{2}$, entonces el triángulo se queda totalmente contenido en un círculo de diamétro el lado $\overline{x_j x_k}$, es decir, un círculo de radio menor o igual a $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$). Mientrás que si el ángulo en x_i es menor a $\frac{\pi}{2}$, recordando la ley de senos obtenemos que el radio del circuncirculo del triángulo es igual $r = \frac{\overline{x_j x_k}}{2\,\mathrm{sen}(\angle x_i)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, ya que $\overline{x_j x_k} \leq 1$ y $\mathrm{sen}(\angle x_i) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ al ser $\angle x_i \geq \frac{2\pi}{3}$ (la función seno es creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$). Los puntos x_i, x_j, x_k están contenidos en un círculo de radio a lo más $\frac{1}{\sqrt{3}}$, el centro de dicho círculo dista a lo más $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de cada punto y por tanto $C_i \cap C_j \cap C_k \neq \emptyset$. Por el Teorema de Helly, $\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$. Cualquier punto en esta intersección sirve como el centro de un círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$ que contiene a los n puntos.

Obsérvese que la misma prueba sirve para una cantidad infinita de puntos, ya que los conjuntos sobre los que aplicamos el Teorema de Helly son círculos (acotados). Así, cualquier conjunto de diámetro 1 está contenida en un círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$. De hecho todo conjunto en el plano de diámetro 1 está contenido en un hexágono de lados $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Profundidad

Hasta ahora, hemos visto algunos ejemplos que utilizan el Teorema de Helly. Veamos en particular el problema 4a). Este nos dice que para n puntos en el plano, existe algún punto en el plano, que satisface que cualquier línea recta que pasa por dicho punto deja al menos la tercera parte de los n puntos de cada lado. Esto se puede generalizar para dimensiones mayores a 2 (dejando menos puntos en los semiespacios determiandos por hiperplanos que pasen por cierto punto).

Definición 10. *Sea $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto finito de puntos. Dado $p \in \mathbb{R}^d$, definimos la profunidad (profundidad de Tukey) de p respecto a $\mathscr{F}$ como*[1]

$$\mathrm{depth}(p) = \min\{|H \cap \mathscr{F}| \mid H \text{ semiespacio que contiene a } x\}.$$

[1] Un semiespacio es una una de las regiones en que queda dividido $\mathbb{R}^d$ al tomar un espacio afín de dimensión $d-1$. Este semiespacio H puede verse como $H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot u \geq \alpha\}$, donde $u \in \mathbb{R}^d$ es un vector fijo, y $\alpha \in \mathbb{R}$ es un escalar fijo.

La profundidad está bien definida ya que cada semiespacio contiene una cantidad de finita de puntos de $\mathscr{F}$.

Ejercicios 11.

- *En los siguientes casos clasifica a los puntos en* $\mathbb{R}^d$ *(*$d = 1, 2, 3$*) de acuerdo a su profundidad.*

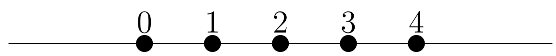

Figura 2: En este caso nuestro conjunto tiene únicamente 5 puntos.

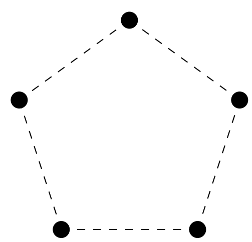

Figura 3: Los vértices de un pentágono regular.

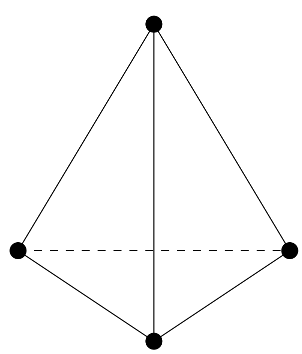

Figura 4: Los vértices de un tetraedro.

- *Muestra que para cualquier conjunto $\mathscr{F}$ y para cualquier punto p*

$$\text{depth}(p) \leq \frac{|\mathscr{F}|}{2}.$$

- *Para cada conjunto $\mathscr{F}$ ¿Quiénes son los puntos de profunidad 0?*

- *Muestra que el conjunto de puntos de profundidad mayor o igual a 1 es un convexo. ¿Es posible afirmar lo mismo para los puntos de profundida mayor o igual a k?.*

Teorema 12 (Teorema del punto central)**.** *Dado un conjunto finito de puntos $\mathscr{F} \in \mathbb{R}^d$, existe $p \in \mathbb{R}^d$ tal que*

$$\text{depth}() \geq \lceil \frac{|\mathscr{F}|}{d+1} \rceil.$$

A cualquier punto p que satisface la desigualdad se le llama un punto central de $\mathscr{F}$.

Demostración. Sea $\mathscr{G} = \{X \mid X \subseteq \mathscr{F},\ |X| > \frac{d}{d+1}|\mathscr{F}|\}$. Para cualesquiera $X_1, X_2, \cdots, X_d + 1 \subseteq \mathscr{G}$

$$|\bigcap_{i=1}^{d+1} X_i| > |\mathscr{F}| - (d+1)\frac{d}{d+1}|\mathscr{F}| = 0.$$

Por lo tanto,

$$\bigcap_{i=1}^{d+1} \text{conv}(X_i) \neq \emptyset.$$

De esta manera, por el Teorema de Helly

$$\bigcap \{\text{conv}(X) \mid X \in \mathscr{G}\} \neq \emptyset.$$

Tomemos un punto p en esta intersección, para todo conjunto $X \in \mathscr{G}$ el punto p pertenece a la envolvente convexa de X, así no existe un subespacio que separe a X de p y $\text{depth}(p) \geq \lceil \frac{|\mathscr{F}|}{d+1} \rceil$. □