Misterios de las profundidades

L.I. Martínez Sandoval, J.L. Miranda Olvera

Taller de Matemáticas Discretas

11 al 16 de junio de 2017

Introducción

Profundidad

Pregunta

Sea $\mathcal{F}$ una familia de objetos geométricos en el espacio y p un punto. ¿Qué tan profundo es p con respecto a $\mathcal{F}$?

Profundidad

Pregunta

Sea $\mathcal{F}$ una familia de objetos geométricos en el espacio y p un punto. ¿Qué tan profundo es p con respecto a $\mathcal{F}$?

Aplicaciones en

- Comunicaciones
- Estadística
- Planeación de movimiento
- Teoremas tipo Helly y tipo Eckhoff

Ejemplo

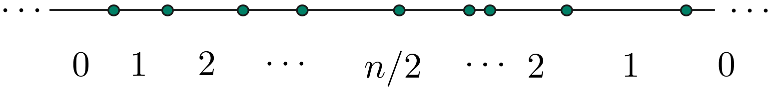

Figure: La profundidad en $\mathbb{R}$

Ejemplo

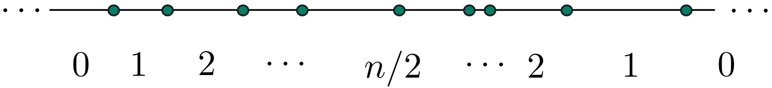

Figure: La profundidad en $\mathbb{R}$

- Los puntos cerca de la mitad tienen mayor profundidad y esta decrece hasta cero conforme nos alejamos.

Ejemplo

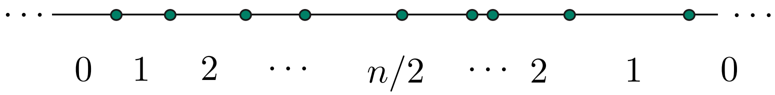

Figure: La profundidad en $\mathbb{R}$

- Los puntos cerca de la mitad tienen mayor profundidad y esta decrece hasta cero conforme nos alejamos.
- Siempre existe un punto con profundidad al menos $\frac{n}{2}$, la mediana.

Ejemplo de profundidad de Tukey

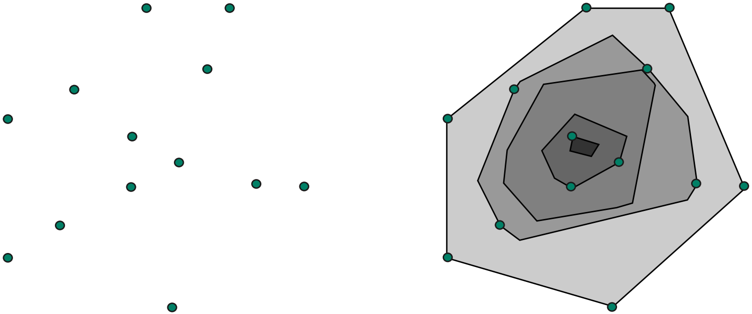

Figure: Ejemplo de profundidad de Tukey con 13 puntos

Profundidad con respecto a una familia de convexos

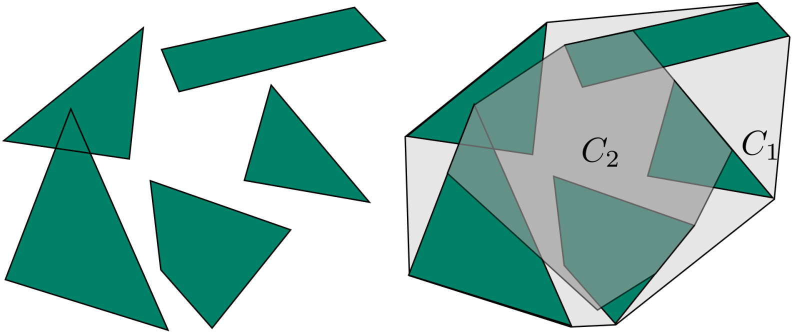

Figure: Ejemplo de profundidad con respecto a figuras geométricas

Consecuencias matemáticas interesantes

- Teorema del punto central
- Relaciones con un problema combinatorio
- Teoremas de intersecciones para convexos

Teorema de Helly

Theorem (Teorema de Helly para el plano, 1923)

Sea $\mathcal{F}$ *una familia de convexos en el plano. Si cualquier subfamilia de* $\mathcal{F}$ *de a lo más* 3 *convexos se intersecta, entonces la intersección de todos los convexos de la familia es no vacía..*

Teorema de Helly

Theorem (Teorema de Helly para el plano, 1923)

Sea $\mathcal{F}$ una familia de convexos en el plano. Si cualquier subfamilia de $\mathcal{F}$ de a lo más 3 convexos se intersecta, entonces la intersección de todos los convexos de la familia es no vacía..

En otras palabras, podemos encontrar localmente una razón para que una familia de convexos no se intersecte.

Teorema de Helly

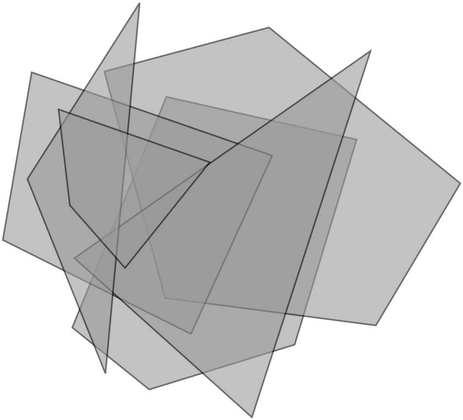

Figure: Estos convexos no se intersectan

Teorema de Helly

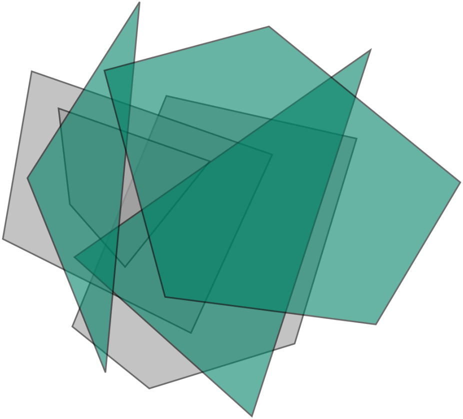

Figure: Es por culpa de tres de ellos

Pregunta principal

Problema

Si sabemos que unos convexos se intersectan de k en k, cuál es la mejor profundidad que podemos garantizar para algún punto?

Pregunta principal

Problema

Si sabemos que unos convexos se intersectan de k en k, cuál es la mejor profundidad que podemos garantizar para algún punto?

- Para $k = 1$ regresamos al teorema de punto central
- Para $k = d + 1$ es el teorema de Helly

Esbozo del temario

- Convexos Parte 1
- Convexos Parte 2 (opcional)
- Profundidad de Tukey y teorema del punto central
- Profundidad con respecto a una familia de convexos
- El problema: lo que sabemos y lo que falta por saber
- Aplicaciones a teoría de transversales (opcional)

¡Los esperamos en el curso!

Problemas de introducción al tema:

http://blog.nekomath.com/tmd

¡Los esperamos en el curso!

Problemas de introducción al tema:

http://blog.nekomath.com/tmd