Entrenamientos nacionales
Álgebra: Ecuaciones funcionales

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Sugerencias para resolver problemas de ecuaciones funcionales

- Conjetura la función que sirve y al final SIEMPRE recuerda verificar que las soluciones en efecto son soluciones.
- Evalúa la función en puntos especiales. Esto puede ser más truculento de lo que parece.
- Usa el efecto bola de nieve: muestra para los naturales con inducción, encuentra $f(0)$, encuentra para los enteros negativos, encuentra para los racionales.
- Intenta demostrar que la función es inyectiva, es decir, que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.
- Intenta demostrar que la función es sobre, es decir, que para cada y en el contradominio hay un x tal que $f(x) = y$.
- Intenta reducir la ecuación a una ecuación tipo Cauchy.
- Haz un dibujo que te pueda dar información de la función.
- Aprovecha la falta de simetría de un lado pero simetría del otro, por ejemplo, si tienes $f(x + f(y)) = x^2 + y^2$, entonces obtienes información intercambiando los papeles de x y y.
- Recuerda siempre en dónde están definidas las funciones, puede ser información fundamental.
- Para funciones con dominio entero, intenta dar una representación especial de los enteros.
- Estudia la continuidad y la monotonicidad de la función.
- **Avanzado** Analiza los puntos fijos de la función.
- **Avanzado** Mete variables adicionales.
- **Avanzado** Usa polinomios.
- **Avanzado** Define una relación de recurrencia.

Ecuaciónes tipo Cauchy

Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, entonces para todo racional r se cumple que $f(r) = rf(1)$. Si además es posible demostrar alguna de las siguientes propiedades, o bien, si se tienen como hipótesis, entonces se cumple $f(x) = xf(1)$ para todo real r.

- Monotonicidad de la función en un intervalo.
- Ver que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$.
- Estar acotada en algún intervalo.

- Continuidad.

Las ecuaciones que cumplen $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$ se pueden transformar fácilmente en una ecuación tipo Cauchy (hay que tener cuidado con los dominios y contadominios). Respectivamente, tienen soluciones $\log_a(x)$, a^x y x^a. Muchos, muchos problemas de ecuaciones funcionales usan estos resultados conocidos de ecuaciones tipo Cauchy.

Ejercicios

1. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Verifica por inducción que $f(n) = nf(1)$. Verifica que $f(\frac{1}{n}) = \frac{f(1)}{n}$. Concluye que $f(q) = qf(1)$ para todo racional q.
2. Encuentra todas las soluciones contínuas de $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4$.
3. Encuentra todas las soluciones contínuas de $f(x+y) = g(x) + h(y)$.
4. Encuentra todas las soluciones "amigables" de $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$.
5. Encuentra todas las soluciones "amigables" de $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$.

Problemas de calentamiento

1. Encuentra funciones f tales que $f(x) = f(\frac{x}{2})$. ¿Cómo puedes definir todas?
2. Encuentra las soluciones de la ecuación funcional $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos(y)$.
3. Muestra que la función f es periódica si existe un a tal que para toda x se tiene
$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$
4. Encuentra todos los polinomios p tales que $p(x+1) = p(x) + 2x + 1$.
5. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que $f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$ para toda n.
6. Encuentra todas las soluciones "amigables" de $f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$.
7. Encuentra las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfacen $f(0) = 1$ y $f(f(n)) = f(f(n+2)+2) = n$ para todo natural n.
8. Encuentra todas las funciones contínuas que satisfacen $3f(2x+1) = f(x) + 5x$.
9. Encuentra todas las soluciones "amigables" de $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)$.
10. Encuentra las soluciones a la ecuación funcional $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$.
11. Sea n un natural. Encuentra las funciones monótonas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:
$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n$$

Paso a paso

Resuelve las siguientes ecuaciones funcionales haciendo poco a poco los pasos que se te piden. Si no puedes hacer un paso, sáltatelo y asúmelo temporalmente como cierto. Al final intenta completar lo que te falta.

1. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que $f(1) = 2$ y $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$.
   - Muestra que $f(n+1) = f(n) + 1$. Encuentra el valor de f en los naturales.

- Encuentra el valor de f en los enteros.
- Determina $f(\frac{1}{n})$. Es posible que antes de esto necesites encontrar $f(m+\frac{1}{n})$ para cada entero m por inducción sobre m.
- Concluye que para racionales positivos r se tiene $f(r)=r+1$. Termina el problema para racionales negativos.

2. (Bielorrusia, 1997) Encuentra las funciones $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que para todo par de reales x y y se tiene que:

$$g(x+y)+g(x)g(y)=g(xy)+g(x)+g(y)$$

- Encuentra las soluciones que son funciones constantes.
- Muestra con el efecto bola de nieve que si las soluciones no son constantes, entonces para cada racional r se cumple $g(r)=r$.
- Muestra que para un racional r y un real x se cumple $g(r+x)=r+g(x)$ y $g(rx)=rg(x)$.
- Muestra que $g(x^2)=g(x)^2$
- Supon que existe un real x con $g(x)>x$. Usa el inciso anterior para llegar a una contradicción. Llega a una contradicción similar si existe un x tal que $g(x)<x$.

3. La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface $x+f(x)=f(f(x))$ para cada $x\in\mathbb{R}$. Encuentra todas las soluciones a $f(f(x))=0$.

- Muestra que f es inyectiva.
- Pon $x=0$. Usa la inyectividad para ver que $f(0)=0$.
- Concluye que $x=0$ es la única solución.

4. Encuentra todas las funciones inyectivas $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tales que cumplan las siguientes dos condiciones:

   a) $f(f(m)+n)=f(f(m))+f(n)$,
   b) $f(1)=2,\ f(2)=4$

- Evalúa $m=1$ y $n=k$. Luego $m=k$ y $n=1$. Usa esta información para ver que $f(f(n))=f(n)+2$.
- Lo anterior dice que si m está en la imagen de f, entonces $f(m)=m+2$. Inductivamente, $f(m+2k)=m+2k+2$.
- Usa el inciso anterior para ver cuánto vale f en los pares. Recuerda que $f(1)=2$.
- Por la inyectividad, f de un impar es impar. Toma el menor impar j tal que $f(i)=j$ para alguna i.
- Haz algunos casos para eliminar posibilidades para f.
- Concluye que $f(1)=2$ y para $n\geq 2$, $f(n)=n+2$.

5. (BMO, 1997, Shortlist) Resuelve la siguiente ecuación funcional real:

$$f(xf(x)+f(y))=y+f(x)^2$$

- Evalúa con $x=0$ para demostrar que $f\circ f$ es sobre e inyectiva.
- Muestra que f es sobre e inyectiva.
- Toma t tal que $f(t)=0$. Muestra que $f(f(y))=y$ y que $t=0$.
- Pon $x=f(w)$ para obtener $f(f(x)x+f(y))=x^2+y$.

- Muestra que para cada x se tiene $f(x)^2 = x^2$.
- Muesta que si $f(1) = 1$, entonces $f(x) = x$ y que si $f(1) = -1$, entonces $f(x) = -x$.

6. (IMO, 2010, Problema 3) Encuentra todas las funciones $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cada par de naturales m y n se cumple que $(g(m) + n)(g(n) + m)$ es un cuadrado perfecto.

   - Muestra que no hay m tal que $g(m) = g(m + 1)$.
   - Muestra que $|g(m) - g(m + 1)| = 1$. Para esto:
   - supon lo contrario y considera un primo p tal que $g(m)$ y $g(m + 1)$ sean conguentes módulo p,
   - construye una n adecuada de modo tal que $g(m+1)+n$ sea divisible una y exactamente una vez por p,
   - usa al menos uno de $g(n) + m$ y $g(n) + m + 1$ no es divisible entre p.
   - Concluye que $g(x) = x + k$ para alguna constante entera positiva k.

7. (IMO, 1979, shorlilst) Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface para cualesquiera dos reales x y y que $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$, muestra que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

   - Muestra que $f(0) = 0$.
   - Muestra que $f(x) = -f(-x)$.
   - Pon $x = u+v+uv$ y $y = 1$. Luego por $x = u$ y $y = 2v+1$. Concluye que $f(2uv+u) = 2f(uv)+u$.
   - Muestra que $f(u) = 2f(\frac{u}{2})$ y por tanto que $f(2x) = 2f(x)$.
   - Haz una substitución adecuada para concluir que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

8. ¿Existe alguna función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = x^2 - 2$ para cada real x?

   - Llama a la función de la derecha g. Muestra que g tiene exactamente dos puntos fijos (llámalos a y b) y que $g \circ g$ tiene exactamente cuatro puntos fijos (a, b, c y d).
   - Muestra que $g(c) = d$ y que $g(d) = c$.
   - Muestra que si x_0 es a o b, entonces $f(x_0)$ es a ó b.
   - Muestra que si x_1 es punto fijo de $g \circ g$, entonces $f(x_1)$ también. Juega un poco con los valores para llegar a una contradicción.

9. Encuentra las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que $f(x)f(yf(x)) = f(x + y)$ para cada par de reales positivos x y y.

   - La constante 1 es solución. Dejaremos esta solución aparte.
   - Supón que hay x con $f(x) > 1$. Entonces puedes tomar $y = \frac{x}{f(x)-1}$. Muestra que $f(x) = 1$, lo cual sería una contradicción.
   - Concluye que $f(x)$ es no creciente.
   - Muesta que $f(x)$ es estrictamente decreciente. Concluye que es inyectiva.
   - Muestra que $f(x) = f(f(yf(x))(x + y - yf(x)))$. Usa la inyectividad de f.
   - Toma $a = f(x)$. Concluye que $f(y) = \frac{1}{1+\alpha y}$, en donde $\alpha = \frac{1-f(a)}{af(a)}$.
   - Muestra que esta familia de funciones cumple.

Problemas

1. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ para las cuales $f(n)$ es un número cuadrado para todo natural n y además $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$.
2. (IMO, 2010, Problema 1) Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las cuales para cualesquiera reales x y y se satisface que $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$.
3. Encuentra las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f((x-y)^2) = f(x^2) - 2xf(y) + y^2$.
4. Encuentra las funciones contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.
5. (IMO, 2008, Problema 4) Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

para reales positivos w, x, y y z que satisfacen $wx = yz$.
6. (Prepa, Belgrado, 2004) Encuentra las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $f(f(m) + f(n)) = m + n$ para cualesquiera naturales m y n.
7. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente y satisface $f(f(n)) = 3n$. Determina $f(2006)$.
8. (IMO, 2011, Problema 3) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface $f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$ para cada par de reales x y y. Muestra que $f(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.
9. (IMO, 2011, Problema 5) Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$. Supón que para cualesquiera m y n la diferencia $f(m) - f(n)$ es divisible entre $f(m-n)$. Muestra que para todos los enteros m y n con $f(m) \leq f(n)$ el número $f(n)$ es divisible entre $f(m)$.
10. (IMO, 1996, Shortlist) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)| \leq 1$ y tal que:

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right).$$

Muestra que f es periódica.
11. (IMO, 1990, Problema 4) Determina la función $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

12. (IMO, 1987, Problema 4) ¿Existe una función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(f(n)) = n + 1987$?
13. (Irán, 1999) Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las cuales

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

14. (APMO, 2011) Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:
    - Existe un real M tal que para cada real x se cumple $f(x) < M$.
    - Para cada par de números reales x y y se satisface que:

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$$

15. (APMO, 2010) Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para cualesquiera tres reales x, y y z satisfacen la identidad $f(f(x) + f(y) + f(z)) = f(f(x) - f(y)) + f(2xy + f(z)) + 2f(xz - yz)$.
16. (APMO, 1995) Encuenta el menor k tal que existe una función $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ con la propiedad que $f(x) \neq f(y)$ si $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$.