Proceso Selectivo para la XXII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2015

- Primer examen selectivo: 21 de febrero
- Segundo examen selectivo: 7 de marzo
- Tercer examen selectivo: 21 de marzo
- Cuarto examen selectivo: 4 de abril
- Resultados finales: 8 de abril
- XXII IMC: 27 de julio al 2 de agosto

Examen selectivo C

Un matemático puro parece tener la ventaja tanto en el lado práctico como en el lado estético. Lo que es útil es la técnica, y la técnica matemática se enseña principalmente a través de las matemáticas puras.

G. H. Hardy, A Mathematicians Apology

C1. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = I + A + A^2 + \ldots + A^{2015}$$

Determina la traza de B.

Nota: La traza de una matriz es la suma de las entradas en su diagonal principal.

C2. Muestra que para cualquier número real x se satisface que:

$$\left\lfloor \frac{x+3}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+4}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+5}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor.$$

Nota: El símbolo $\lfloor y \rfloor$ denota al mayor entero que es menor o igual que y.

C3. Una función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ es *buena* si existe un entero positivo n y polinomios P_j con coeficientes reales ($0 \leq j \leq n$) con P_n no nulo y tales que para todo $t \in (-1, 1)$ se cumple que

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(t) f^{(j)}(t) = 0.$$

Muestra que si f y g son buenas, entonces $f + g$ y $f \cdot g$ también son buenas.

Nota: Se define recursivamente $f^{(0)}$ como f y para $m \geq 0$, $f^{(m+1)}$ como la derivada de $f^{(m)}$.

C4. Un conjunto de n intervalos cerrados y acotados I_1, I_2, …, I_n de $\mathbb{R}$ es *numérico* si para cada par de enteros a y b en $\{1, 2, \ldots, n\}$ sucede que $I_a \cap I_b \neq \emptyset$ si y sólo si a y b son primos relativos. Encuentra el mayor n para el cual existen conjuntos de n intervalos numéricos.

C5. El trapecio isósceles $ABCD$ tiene una circunferencia interna Γ que es tangente a los cuatro lados. La diagonal AC corta a Γ en K y L (con K entre A y L). Determina el valor de

$$\frac{AL \cdot KC}{AK \cdot LC}.$$

Examen selectivo C
Soluciones

C1. Como la traza es una función lineal, basta calcular la traza de cada una de las matrices A^j para $j = 0, 1, \ldots, 2015$ y sumarlas. Afirmamos que $\operatorname{tr}(A^j) = 0$ si j no es múltiplo de 3 y $\operatorname{tr}(A^j) = 3 \cdot 6^k$ si $j = 3k$ con k entero.

Vamos a mostrar esto. Realizando las operaciones, notamos que $A^3 = 6 \cdot I$. De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} A^{3k} &= 6^k \cdot I, \\ A^{3k+1} &= 6^k \cdot A, \\ A^{3k+2} &= 6^k \cdot A^2. \end{aligned}$$

Notemos que tanto A como A^2 tienen ceros en su diagonal, de modo que $\operatorname{tr}(A^{3k+1}) = \operatorname{tr}(A^{3k+2}) = 0$. Además, $\operatorname{tr}(6^k \cdot I) = 3 \cdot 6^k$. Esto muestra la afirmación.

De esta forma,

$$\operatorname{tr}(B) = \sum_{j=0}^{2015} \operatorname{tr}(A^j) = \sum_{k=0}^{671} 3 \cdot 6^k = 3 \cdot \frac{6^{672} - 1}{5}.$$

$\square$

C2. Consideremos la función

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x+3}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+4}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+5}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor.$$

Debemos mostrar que $f(x) = 0$ para todo real x. Para esto mostraremos primero que $f(y) = 0$ para y en el intervalo $[0, 6)$. Esto lo haremos por casos.

- Para $y \in [0, 1)$ tenemos que $f(y) = 0 - 0 + 0 - 0 + 0 = 0$.
- Para $y \in [1, 2)$ tenemos que $f(y) = 0 - 0 + 1 - 1 + 0 = 0$.
- Para $y \in [2, 3)$ tenemos que $f(y) = 0 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$.
- Para $y \in [3, 4)$ tenemos que $f(y) = 1 - 1 + 1 - 2 + 1 = 0$.
- Para $y \in [4, 5)$ tenemos que $f(y) = 1 - 1 + 1 - 2 + 1 = 0$.
- Para $y \in [5, 6)$ tenemos que $f(y) = 1 - 1 + 1 - 3 + 2 = 0$.

Ahora tomemos un número real x arbitrario y escribámoslo como $x = 6n + y$ con n un entero positivo y $y \in [0, 6)$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
f(n+y) &= \left\lfloor \frac{6n+y+3}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{6n+y+4}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6n+y+5}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{6n+y+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6n+y+1}{3} \right\rfloor \\
&= n + \left\lfloor \frac{y+3}{6} \right\rfloor - n - \left\lfloor \frac{y+4}{6} \right\rfloor + n + \left\lfloor \frac{y+5}{6} \right\rfloor - 3n - \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor + 2n + \left\lfloor \frac{y+1}{3} \right\rfloor \\
&= f(y) = 0.
\end{aligned}
$$

Esto termina el problema. □

C3. Tomemos dos funciones buenas f y g y supongamos que

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(t) f^{(j)}(t) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{m} Q_k(t) g^{(k)}(t) = 0$$

para polinomios con coeficientes reales P_j y Q_k. De aquí podemos despejar

$$f^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) f^{(j)}(t) \quad \text{y} \quad g^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} q_k(t) g^{(k)}(t),$$

en donde $p_j = \frac{P_j}{P_n}$ y $q_k = \frac{Q_k}{Q_n}$ para $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Esto quiere decir que la $n-$ésima derivada de f es una combinación lineal de las anteriores usando como coeficientes funciones racionales. Las funciones racionales son cerradas bajo el operador de derivar. Derivando repetidas veces y usando que $(A+B)' = A' + B'$ y $(AB)' = A'B + AB'$, obtenemos para $j \geq n$ que $f^{(j)}$ también es combinación lineal de elementos de $F = \{f, f', \ldots, f^{(n-1)}\}$ usando como coeficientes funciones racionales. De manera similar, para $k \geq m$ tenemos que $g^{(k)}$ es combinación lineal de elementos de $G = \{g, g', \ldots, g^{(m-1)}\}$ usando como coeficientes funciones racionales.

De esta forma, $(f+g)^{(l)}$ se puede escribir como combinación lineal de elementos de $F \cup G$, es decir, vive en un espacio vectorial de dimensión a lo más $m+n$. De esta forma, si variamos l en $\{0, 1, \ldots, m+n\}$ obtenemos $m+n+1$ funciones que deben ser linealmente dependientes. Esto muestra la existencia de una combinación lineal

$$\sum_{l=0}^{m+n} R_l(t)(f+g)^{(l)}(t) = 0.$$

donde no todos los coeficientes son cero. Multiplicando por el mínimo común múltiplo de los numeradores obtenemos una expresión que muestra que $f+g$ es buena.

Ahora mostraremos que $f \cdot g$ es buena. Notemos que $(f \cdot g)^{(l)}$ está en el espacio vectorial generado por las funciones $f^{(j)} \cdot g^{(k)}$ para $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Este espacio vectorial tiene dimensión menor o igual a $m \cdot n$. De esta forma, tomando $(f \cdot g)^{(l)}$ para l en $\{0, 1, \ldots, m \cdot n\}$, obtenemos la combinación lineal

$$\sum_{l=0}^{m\cdot n} R_l(t)(f\cdot g)^{(l)}(t) = 0.$$

Una vez más, al multiplicar por el mínimo común múltiplo de los numeradores obtenemos la expresión que muestra que $f \cdot g$ es buena. $\square$

C4.

- El siguiente es un ejemplo de intervalos numéricos para $n = 8$

  $$I_1 = I_5 = I_7 = [0,7],\ I_3 = [0,5],\ I_2 = [0,1],\ \ I_4 = [2,3],\ \ I_8 = [4,5],\ I_6 = [6,7]$$

  Notemos que el 1, 5 y 7 son primos relativos con todos los demás números y que sus intervalos correspondientes intersectan a todos los intervalos. Los números 2, 4, 6 y 8 comparten como factor en común al 2, y sus intervalos correspondientes son ajenos. Finalmente, los intervalos I_3 e I_6 también son ajenos.

  Si queremos encontrar un ejemplo para $n \leq 8$ basta tomar de este ejemplo los intervalos de I_1 a I_n.

- Supongamos que tenemos un ejemplo de intervalos numéricos para $n \geq 9$. Consideremos a los intervalos I_2, I_4, I_3 e I_9. Los intervalos I_2 e I_4 deben ser ajenos pues 2 y 4 tienen como factor común al 2. Supongamos sin pérdida de generalidad que I_2 termina en a y que I_4 comienza en b con $a < b$. Como 2 y 3 son primos relativos, entonces I_2 e I_3 se deben intersectar. Análogamente, I_4 e I_3 se deben intersectar. De este modo, I_3 debe contener a a y a b. De la misma manera, I_9 debe contener a a y a b. Entonces $I_3 \cap I_9 \neq \emptyset$. Pero esto sería una contradicción, pues 3 y 9 no son primos relativos. Esto muestra que el acomodo es imposible en este caso. $\square$

C5. Supongamos que $A'B'C'D'$ es un cuadrado de lado s y definamos K', L' análogamente a como se definen K y L. Entonces $A'C' = s\sqrt{2}$, $K'L' = s$, $A'L' = K'C' = s \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ y $A'K' = L'C' = s \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Entonces,

$$\frac{A'L' \cdot K'C'}{A'K' \cdot L'C'} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2} = (\sqrt{2}+1)^4 = 17 + 12\sqrt{2}.$$

Consideremos ahora un trapecio isósceles arbitrario $ABCD$ con incírculo ω y con $AB||CD$. Como no hay tres de A, B, C y D que sean colineales, entonces existe una transformación proyectiva τ que lleva $ABCD$ en un paralelogramo $A'B'C'D'$. Este mapa lleva ω a una cónica ω' tangente a los cuatro lados de $A'B'C'D'$. Sea $P = BC \cap AD$, y sea ℓ la recta por P paralela a la recta AB. Entonces τ lleva ℓ a la recta al infinito. Como ω no intersecta a ℓ, entonces ω' es una elipse. De este modo, componiendo τ con una transformación afín podemos suponer que ω' es un círculo.

Sean W, X, Y y Z los puntos de tangencia de ω con los lados AB, BC, CD y DA respectivamente y W', X', Y', Z' sus imágenes bajo τ. Por simetría, la recta WY pasa por la intersección de las rectas BC y AD, y la recta XZ es paralela a las rectas AB y CD. De este modo, $W'Y'||B'C'||A'D'$ y $X'Z'||A'B'||C'D'$. Pero ω' es tangente a las rectas paralelas $A'B'$ y $C'D'$ en W' y Y', de modo que $W'Y'$ es un diámetro de ω' y $W'Y' \perp A'B'$, entonces

$B'C' \perp A'B'$ y así $A'B'C'D'$ es un rectángulo. Como además tiene circunferencia inscrita, entonces debe ser un cuadrado. Esto nos lleva al caso considerado al inicio del problema; si K' y L' son las intersecciones de $A'C'$ con ω' (con K' entre A' y L'), entonces $\frac{A'L' \cdot K'C'}{A'K' \cdot L'C'} = 17+12\sqrt{2}$. Ahora, τ lleva $\{K, L\} = AC \cap \omega$ a $\{K', L'\} = A'C' \cap \omega'$ (pero tal vez no en ese orden). Si $\tau(K) = K'$ y $\tau(L) = L'$, entonces como las transformaciones proyectivas preservan razones cruzadas, tendríamos que

$$\frac{AL \cdot KC}{AK \cdot LC} = \frac{A'L' \cdot K'C'}{A'K' \cdot L'C'} = 17 + 12\sqrt{2}.$$

Analicemos ahora el otro caso. Si $\tau(K) = L'$ y $\tau(L) = K'$, entonces obtendríamos que $\frac{AL \cdot KC}{AK \cdot LC} = \frac{1}{17+12\sqrt{2}} < 1$, lo cual es imposible pues $AL > AK$ y $KC > LC$. De esta forma, se sigue que $\frac{AL \cdot KC}{AK \cdot LC} = 17 + 12\sqrt{2}$, como se quería mostrar. $\square$