Proceso Selectivo para la XXII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2015

- Primer examen selectivo: 21 de febrero
- Segundo examen selectivo: 7 de marzo
- Tercer examen selectivo: 21 de marzo
- Cuarto examen selectivo: 4 de abril
- Resultados finales: 8 de abril
- XXII IMC: 27 de julio al 2 de agosto

Examen selectivo B

Las matemáticas es la más curiosa de las materias - no hay ninguna en la cual la verdad juegue bromas tan raras. Tiene la técnica más elaborada y más fascinante, y nos da inigualables entradas para la muestra de auténticas habilidades profesionales.

G. H. Hardy, A Mathematicians Apology

B1. Encuentra la factorización en primos de $1,005,010,010,005,001$.

B2. Se tiene un cuerpo convexo F en $\mathbb{R}^3$. Al proyectar F a cualquiera de los planos xy, yz o zx se obtiene un cuadrado de lado 1.

- ¿Se puede concluir que F es un cubo?
- ¿Se puede concluir que F contiene un cuadrado de lado 1?

Nota: Un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto compacto F que cumple que para cualesquiera dos puntos x y y en F se tiene que el segmento de recta de x a y se queda contenido en F.

B3. Encuentra todos los grupos G con n elementos que tengan al menos 2^{n-2} subgrupos propios.

B4. En un congreso de matemáticas se le quiere regalar una playera a cada uno de los n asistentes. Si dos asistentes han publicado un artículo juntos se quiere que tengan playeras de diferente color. Se sabe que no hay cuatro asistentes tales que cualesquiera dos de esos cuatro hayan publicado un artículo juntos.

Muestra que hay una repartición que usa a lo más $\frac{n+3}{2}$ colores de playeras.

B5. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real simétrica de $n \times n$ tal que $a_{ii} = 1$ y $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 2$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Muestra que $0 < \det A \leq 1$.

Examen selectivo B
Soluciones

B1. Usando el binomio de Newton, notemos que

$$\begin{aligned}1001^5 = (1000+1)^5 &= 1000^5 + 5\cdot 1000^4 + 10\cdot 1000^3 + 10\cdot 1000^2 + 5\cdot 1000 + 1\\ &= 1,005,010,010,005,001\end{aligned}$$

Además, $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$. De esta forma, la factorización del número es $7^5\cdot 11^5\cdot 13^5$. □

B2. Ninguna de las dos conclusiones es válida. La siguiente construccion da un contraejemplo para ambas. Tomemos los cuatro puntos $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$. Notemos que la distancia entre cualesquiera dos de ellos es $\sqrt{2}$, por lo que son los vértices de un tetraedro regular. Consideremos a F como la envolvente convexa (el mínimo convexo) que contiene a los cuatro.

Primero mostraremos que la proyección en cada plano canónico es un cuadrado de lado 1. En el plano xy consideremos el cuadrado C con vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Notemos que F está contenida en $C\times\mathbb{R}$. Entonces la proyección de F al plano xy se queda contenida en C. Además los vértices del tetraedro se proyectan a los vértices de C. Como F es convexo, su proyección también. Esto muestra que la proyección es precisamente C. Por simetría, sucede lo análogo al proyectar en los planos yz y zx.

Como F es un tetraedro, entonces no es un cubo. Falta mostrar que no contiene a ningún cuadrado de lado 1. Notemos que un cuadrado de lado 1 tiene diagonal $\sqrt{2}$. En F los puntos más alejados son los vértices y justo están a distancia $\sqrt{2}$. Así que si F contiene un cuadrado $ABCD$, la diagonal (digamos AC) debe estar sobre una arista de F. Como BD cruza AC, a lo más uno de los puntos B y D está dentro de F. Esto da una contradicción, lo cual termina el problema. □

B3. Sea H un subgrupo propio de G. Como $|H|$ divide a $|G| = n$ y además $|H|\neq n$, entonces $|H|\leq\frac{n}{2}$. Además H tiene a e y al menos a otro elemento. Esto nos permite acotar la cantidad de subgrupos propios con la cantidad de subconjuntos de $G-\{e\}$ que tienen al menos 1 y a lo más más $\frac{n}{2}$ elementos.

Si n es par, digamos $n = 2k$, entonces esta cantidad de subconjuntos es

$$\binom{2k-1}{1}+\binom{2k-1}{2}+\ldots+\binom{2k-1}{k-1} < 2^{2k-2}-1 < 2^{n-2}.$$

Eso muestra que en este caso no hay ejemplos. Si n es impar, con $n = 2k+1$, entonces la cantidad de subconjuntos es

$$\binom{2k}{1}+\binom{2k}{2}+\ldots+\binom{2k}{k-1} < 2^{2k-1}-1 < 2^{n-2}.$$

Así que de nuevo no hay ejemplos. Esto muestra que no hay grupos que cumplan la condición que se pide. □

B4. Supongamos que ya hicimos una repartición de playeras que use la mínima cantidad posible de colores. Llamemos a esa mínima cantidad c. Sea c_i la cantidad de colores que se utilizaron i veces. Notemos que $c = c_1 + c_2 + \ldots$. Notemos además que

$$n = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots \geq c_1 + 2(c_2 + c_3 + \ldots) = c_1 + 2(c - c_1) = 2c - c_1.$$

De esta forma, $c \leq \frac{n+c_1}{2}$. Pero afirmamos que $c_1 \leq 3$. Si hubiera cuatro colores que se usaron una vez, al fijarnos en los matemáticos que los portan hay dos de ellos. digamos A y B, que no han publicado juntos. De esta manera, a A le podemos dar playera del color que tiene B, disminuyendo el número de colores y contradiciendo la minimalidad de c. Así, en efecto ≤ 3 y por lo tanto $\frac{n+3}{2}$ colores bastan. $\square$

Nota: Esta demostración se puede adaptar para mostrar que si de cada k hay dos que no han publicado juntos, entonces $c \leq \frac{n+k}{2}$.

B5. *Idea de la demostración* Mostar que los valores propios son reales positivos con suma 1. Como $\det A$ es el producto de los eigenvalores, entonces $\det A$ es positivo. Para la cota superior, se usa la desigualdad $MA - MG$.

Detallemos la prueba. Como la matriz es real simétrica, entonces es diagonalizable y en así sus valores propios son reales. Supongamos que sus valores propios son λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n.

Supongamos que algún valor propio es menor o igual a cero, digamos λ_1. Tenemos entonces que $|\lambda_1 - 1| \geq 1$. Supongamos que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un vector propio correspondiente a λ_1 y que x_i es la entrada con máximo valor absoluto. Como no todas las entradas de x son cero, entonces $|x_i| > 0$. Así,

$$\begin{aligned}
|x_i| \leq |x_i| \cdot |\lambda_1 - 1| = |\lambda_1 x_i - x_i| &= \left| \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) - x_i \right| \\
&= \left| \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \\
&\leq |x_i| \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |x_i|.
\end{aligned}$$

Esto es una contradicción. De esta forma, todos los valores propios son positivos. Como el determinante es el producto de los valores propios, $\det A > 0$. Y como la suma de los valores propios es la traza, la cual es n, entonces por la desigualdad $MA - MG$ tenemos que:

$$\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \leq \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}{n} \right)^n = 1.$$

$\square$