Proceso Selectivo para la XXI IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM

Tercer examen selectivo

3A) Considera la matriz $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$. Sean a_n y b_n las entradas en la primer columna de A_n (a_n la de arriba y b_n la de abajo). Encuentra el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

3B) Determina todos los enteros positivos n en base 10 tales que la raiz cúbica de n se obtiene quitando los últimos 3 dígitos.

Nota: Los últimos tres dígitos son los de hasta la derecha.

3C) Un entero positivo k es *bueno* si es **par** y para todo primo p el número $p^2 + k$ es compuesto. Muestra que existe una infinidad de enteros positivos buenos.

3D) La función $f(x)$ está definida en $[0, 1]$ y es monótona decreciente (es decir, para $x \leq y$ se tiene $f(x) \geq f(y)$). Muestra que para toda $\alpha \in (0, 1)$ se cumple que

$$\int_0^1 f(x)\, dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x)\, dx.$$

3E) Sea X un conjunto con n elementos y $A_1, \ldots, A_m$ subconjuntos de X tales que:

1. $|A_i| = 3$ para $i = 1, \ldots, m$ y
2. $|A_i \cap A_j| \leq 1$ para cada $i \neq j$ $(i, j \in \{1, \ldots, m\})$.

Muestra que existe un subconjunto de X con al menos $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ elementos que no contiene a ninguno de los conjuntos A_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Soluciones

3A) Consideremos la sucesión $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y para $x \geq 3$, $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$. Por inducción se muestra que $a_n = x_{n+1}$ y $b_n = x_n$. Tenemos que x_n está dada por una recursión lineal con polinomio característico $x^2 - 2x - 1$, con raíces $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ y $\beta = 1 - \sqrt{2}$. De esta forma, existen constantes r y s para las cuales:

$$x_n = r\alpha^n + s\beta^n.$$

Notemos que $|\alpha| > |\beta|$, de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r\alpha^{n+1} + s\beta^{n+1}}{r\alpha^n + s\beta^n} = \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{r + s\frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}}{r + s\frac{\beta^n}{\alpha^n}} = \alpha = 1 + \sqrt{2}.$$

3B) Supongamos que $n = a^3$ y que b es el número formado por los últimos tres dígitos de n. Por hipótesis, tenemos que $b = a^3 - 1000a$ y por lo tanto $0 \leq a^3 - 1000a \leq 999$.

De la desigualdad de la izquierda obtenemos que $a^3 \geq 1000a$ y por lo tanto $a^2 \geq 1000$. Entonces $a \geq \sqrt{1000} > 31$ y como a es entero, entonces $a \geq 32$.

De la desigualdad de la derecha obtenemos que $a^3 - 1000a \leq 999$. Sumando 1 de ambos lados y reacomodando, tenemos $a^3 + 1 \leq 1000(a + 1)$. Dividiendo entre $a + 1$ nos queda $a^2 - a + 1 \leq 1000$. Una forma de continuar es multiplicar por 4 de ambos lados y restar 3 para obtener $(2a - 1)^2 \leq 3997$. De esta forma, $2a - 1 \leq \sqrt{3997} < 64^2$. Como a es entero, tenemos que $2a - 1 \leq 63$ y por tanto $a \leq 32$.

Con esto obtenemos que $a = 32$ es la única posible solución y en efecto tomar $n = 32^3 = 32768$ funciona.

3C) Notemos que a excepción de 3, para todo primo p se tiene que $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, de modo que si $k \equiv 2 \pmod 3$, entonces esta k funcionará para todo primo excepto 3. Para cubrir a 3, pedimos además $k \equiv 1 \pmod 5$, pues $3^2 = 9 \equiv 4 \pmod 5$. Con esto $3^2 + k$ es múltiplo de 5. Finalmente, para que k sea par, pediremos que $k \equiv 0 \pmod 2$.

Esto nos da un sistema de ecuaciones en tres congruencias que tiene la solución $k \equiv 26 \pmod{30}$. De esta forma, todos los números k de la forma $30r + 26$ satisfacen lo requerido.

3D) Como f es decreciente y la integral es monótona, tenemos lo siguiente:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(\alpha)\, dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x)\, dx.$$

De manera análoga se muestra que $\frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 f(x)\, dx \leq f(\alpha)$. De esta forma,

$$\frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 f(x)\, dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x)\, dx.$$

De aquí, $\alpha \int_\alpha^1 f(x) \leq (1 - \alpha) \int_0^\alpha f(x)\, dx$. Reacomodando obtenemos la desigualdad buscada.

3E) Sea S un subconjunto maximal que no contiene a ninguno de los A_i. Supongamos que $|S| = c$. Como S es maximal, entonces no puede entrar ningún otro elemento, de modo que para cada $x \in X \setminus S$ existe al menos un par $\{y_1, y_2\} \subseteq Y$ tal que $\{x, y_1, y_2\}$ es uno de los A_i. Pero como los A_i se intersectan en a lo más un elemento, entonces no podemos tener dos x distintas que les toque la misma pareja $\{y_1, y_2\}$ (pues darían dos ternas $\{x_1, y_1, y_2\}$ y $\{x_2, y_1, y_2\}$ con intersección de dos elementos).

De esta forma, los elementos en $X \setminus S$ son a lo más $\binom{c}{2}$, es decir, $n - c \leq \binom{c}{2}$ que reacomodando queda $2n \leq c^2 + c$. Resolviendo la desigualdad cuadrática:

$$c \geq \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} > \sqrt{2n} - 1.$$

Y como c es entero, entonces $c \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$.