Proceso Selectivo para la XXI IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM

Segundo examen selectivo y soluciones

2A) Cualquier parábola P divide al plano en una región convexa $A(P)$ y una no convexa $B(P)$. ¿Es posible encontrar un entero positivo n y parábolas $P_1, \ldots, P_n$ tales que $A(P_1)$, $A(P_2)$, $\ldots$, $A(P_n)$ cubran el plano?

2B) En un polígono de $2k+1$ vértices, un *triángulo flaco* es un triángulo formado por dos vértices adyacentes y el vértice diametralmente opuesto a esta pareja. ¿Para qué valores de k es posible pintar con verde, blanco y rojo los vértices de un polígono de $2k+1$ lados de modo que en todos los triángulos flacos se usa cada color una y sólo una vez?

2C) Sean a, b, c, p, q, r algunas constantes reales. Determina las funciones contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

$$f(ax + by + c) = pf(x) + qf(y) + r$$

para cualesquiera reales x y y.

2D) Si A y B son matrices de 2×2 con entradas reales tales que $A^2 + B^2 = AB$, muestra que $(AB - BA)^2 = 0$.

2E) Muestra que para cualquier entero positivo m la ecuación

$$\frac{n}{m} = \left\lfloor \sqrt[3]{n^2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 1$$

tiene al menos una solución n en los enteros positivos.

Soluciones

2A) *Lema:* Si P es una parábola y ℓ una recta que no es paralela a la directriz de P, entonces ℓ intersecta a $A(P)$ en un segmento acotado (quizás vacío).

Demostración: Tras una rotación del plano, podemos suponer sin pérdida de generalidad que P es gráfica de un polinomio x^2+rx+s y entonces ℓ es gráfica de una recta $ax+b$. Los puntos de intersección de ℓ con P son las soluciones a $x^2+(r-a)x+(s-b)=0$, que a lo más son dos. Si hay exactamente una raiz real, la intersección es un punto. Si hay dos raíces reales, entonces la intersección es el intervalo que queda entre los puntos correspondientes (pues la intersección debe ser convexa). □

Regresando al problema, la respuesta es que no es posible. Para ver esto, tomamos una recta ℓ que no sea paralela a ninguna de las directrices de las parábolas. Las $A(P)$ cubren una cantidad finita de segmentos acotados de ℓ, de modo que no cubren a ℓ y por lo tanto no cubren al plano.

2B) Tomemos un vértice y nombrémoslo a_0. Recursivamente, tomamos a_{i+1} como el vértice que está después de a_i a k vértices girando en el sentido horario. Como k y $2k+1$ son primos relativos, entonces $a_0, a_1, \ldots, a_k$ son todos los vértices. Los tríangulos flacos son exactamente aquellos de la forma $a_j a_{j+1} a_{j+2}$ (tomando los índices módulo $2k+1$).

De esta forma, el problema se traduce a colorear los vértices en un ciclo de modo que cualesquiera tres consecutivos sean de distinto color. Una vez que pintamos dos consecutivos se forza la coloración y se puede terminar sólo cuando hay una cantidad múltiplo de 3 de vértices. De esta forma, hay una coloración si y sólo si $2k+1$ es múltiplo de 3 (si y sólo si $k \equiv 1 \pmod 3$).

2C) La demostración es larga. Los casos principales dependen de que algunas de las constantes a, b, p o q pueden ser 0. Veremos los siguientes grandes casos:

- Todas las constantes son cero
- $a=0$ y $p \neq 0$ y análogas
- $a=0$ y $p=0$ y análogas
- Ninguna de esas constantes es cero

Todas las constantes son cero

Si todas son 0, entonces la única restricción que tenemos es $f(c)=r$, de modo que cualquier función f que satisfaga esto cumple.

$a=0$, $p \neq 0$, $b, q \in \mathbb{R}$ y análogas

Si $a=0$ y $p \neq 0$, tomando $y=0$ tenemos $f(c)=pf(x)+qf(0)+r$, de modo que la solución es $f(x)=\frac{f(c)-qf(0)-r}{p}$. De manera similar si $p=0$ y $a \neq 0$, tomando $y=0$ tenemos $f(ax+c)=qf(0)+r$. Como $ax+c$ es sobre, entonces $f(x)=qf(0)+r$ para toda x. De manera similar se tratan los casos $(b=0, q \neq 0)$ y $(b \neq 0, q=0)$.

$b=0$, $q=0$, $ap\neq 0$ y análogas

Supongamos ahora que $b=0$ y $q=0$. Tomemos una f que satisfaga la nueva ecuación funcional:

$$f(ax+c)=pf(x)+r.$$

Notemos que tomando $x=\frac{y-c}{a}$ y reacomodando obtenemos $f(\frac{1}{a}y-\frac{c}{a})=\frac{1}{p}f(y)-\frac{r}{y}$, de modo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|a|\geq 1$. Consideremos los siguientes casos:

- $a=1$, $c=0$, $p\neq 1$: entonces la solución es $f(x)=\frac{r}{1-p}$.
- $a=1$, $c=0$, $p=1$: la ecuación funcional implica $r=0$ y no hay ninguna restricción, de modo que cualquier f funciona.
- $a=1$, $c>0$: entonces basta definir f continuamente en $[0,c)$ pidiendo además que $\lim_{x\to c^-} f(x)=pf(0)+r$. La ecuación funcional determina f totalmente en todos los reales. De manera análoga se trata $a=1$, $c<0$.

A partir de ahora podemos suponer $a\neq 1$ y por tanto, que $ax+c$ tiene un punto fijo.

- $a=-1$, $c=0$, $|p|\neq 1$: entonces

  $$f(x)=pf(-x)+r=p(pf(x)+r)+r=p^2f(x)+pr+r,$$

  De aquí que $f(x)=\frac{pr+r}{1-p^2}$
- $a=-1$, $c=0$, $p=1$: como antes $f(x)=p^2f(x)+pr+r=f(x)+2r$, de donde $r=0$. La ecuación queda $f(x)=f(-x)$, es decir, f es una función impar (y contínua)
- $a=-1$, $c=0$, $p=-1$: entonces $f(-x)=-f(x)+r$. Tomando $x=0$ tenemos $f(0)=\frac{r}{2}$. En este caso basta definir contínuamente f en los reales positivos de manera continua y de modo que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{r}{2}$.

De esta forma, supondremos que $|a|>1$. Sea $g(x)=ax+c$. Consideremos los conjuntos A, B y C de reales donde respectivamente tenemos $g(x)<x$, $g(x)=x$ y $g(x)>x$. Notemos que como $a\neq 1$, entonces B sólo tiene al real $\frac{c}{1-a}$.

Para $a>1$ afirmamos que f queda totalmente determinada por:

- Definir $f(\frac{c}{1-a})=\frac{r}{1-p}$ si $p\neq 1$ o arbitrariamente si $p=1$ (notemos que el punto fijo de g en este caso nos dice que $r=0$).
- Tomar una t en A (si $A\neq\emptyset$), considerar el intervalo $[g(t),t)$ (que está contenido en A) y definir f continuamente ahí, cuidando que $\lim_{x\to t^-} f(x)=\frac{f(g(t))-r}{p}$.
- Tomar una s en C (si $C\neq\emptyset$), considerar el intervalo $(s,g(s)]$ (que está contenido en C) y definir s continuamente ahí, cuidando que $\lim_{x\to s^+} f(x)=\frac{f(g(s))-r}{p}$.

Como $a > 1$, entonces $g(A) = A$, $g(B) = B$ y $g(C) = C$. Así los intervalos de la forma $[g^n(x), g^{n-1}(x))$ $(n \in \mathbb{Z})$ son una partición de A, los de la forma $(g^n(x), g^{n+1}(x)]$ $(n \in \mathbb{Z})$ son una partición de C y además definimos el valor en el punto fijo. La continuidad se preserva pidiendo los límites requeridos. De esta forma las tres condiciones anteriores son suficientes y necesarias para definir una f que cumpla.

En el caso $a < -1$ tenemos que la ecuación funcional queda totalmente determinada por:

- Definir $f(\frac{c}{1-a}) = \frac{r}{1-p}$ si $p \neq 1$ o arbitrariamente si $p = 1$ (notemos que el punto fijo de $ax + b$ en este caso nos dice que $r = 0$).
- Tomar una t en C, considerar el intervalo $(t, g^2(t)]$ (que está contenido en C) y definir f continuamente ahí, cuidando que $\lim_{x \to t^+} f(x) = \frac{f(g(t))-r}{p}$.

Ahora como $a < -1$, tenemos que $g(A) = C$ y $g(C) = A$. De esta forma, la ecuación funcional determina completamente el valor de f es todos los reales pues los intervalos de la forma $(g^n(t), g^{n+2}(t)]$ $(n \in \mathbb{Z})$ cubren a $A \cup C$ y definimos f en B. El límite por la izquierda requerido es lo único necesario para satisfacer la continuidad.

De manera similar se trata $a = 0$ y $p = 0$.

Ninguna de las constantes es cero

Sean u y v reales arbitrarios. Vamos a realizar las siguientes substituciones para x y y:

- $x = -\frac{c}{a}$ y $y = 0$ nos da:

$$f(0) = pf\left(-\frac{c}{a}\right) + qf(0) + r$$

- $x = \frac{u-c}{a}$ y $y = 0$ nos da:

$$f(u) = pf\left(\frac{u-c}{a}\right) + qf(0) + r$$

- $x = -\frac{c}{a}$ y $y = \frac{v}{b}$ nos da:

$$f(v) = pf\left(-\frac{c}{a}\right) + qf\left(\frac{v}{b}\right) + r$$

- $x = -\frac{c}{a}$ y $y = 0$ nos da:

$$f(u+v) = pf\left(\frac{u-c}{a}\right) + qf\left(\frac{v}{b}\right) + r$$

De esta forma, se satisface que $f(u+v) = f(u) + f(v) - f(0)$. Restando $f(0)$ a ambos lados y definiendo $g(x) = f(x) - f(0)$, tenemos que $g(x)$ satisface la ecuación funcional de Cauchy $g(u+v) = g(u) + g(v)$. Como además es contínua, entonces es de la forma $g(x) = \alpha x$ para algún real α. De este modo, $f(x) = \alpha x + \beta$ (para $\beta = f(0)$).

Sin embargo, no todas estas funciones satisfacen la ecuación funcional original. Substituyendo en la ecuación original tenemos:

$$\alpha(ax+by+c)+\beta = p\alpha x + p\beta + q\alpha y + q\beta + r$$

Comparando los coeficientes de x y de y concluimos que además es necesario $a = p$, $b = q$. Igualando lo que resta, concluimos que además se debe satisfacer $\alpha c + \beta = a\beta + b\beta + r$. Y una vez que esto se satisface, en efecto tenemos una solución.

2D) Si ω una raíz cúbica primitiva de la unidad entonces

$$\begin{aligned}
|\det(\omega A + B)|^2 &= \det(\omega A + B)\overline{\det(\omega A + B)} \\
&= \det(\omega A + B)\det(\overline{\omega} A + B) \\
&= \det(\omega A + B)\det(\overline{\omega} A + B) \\
&= \det(\omega(AB - BA)) \\
&= \omega^2 \det((AB - BA))
\end{aligned}$$

Como $|\det(\omega A + B)|^2$ es un número real, entonces $\det(AB-BA) = 0$. Además, $\mathrm{tr}(AB-BA) = 0$. Por Cayley-Hamilton, $X^2 - \mathrm{tr}X \cdot X + \det X \cdot I = 0$ para cualquier matriz X de 2×2. Usando esto para $X = AB - BA$ obtenemos la conclusión deseada.

2E) Como el lado derecho es entero, hacemos la substitución $n = mk$. De esta forma, el problema se reduce a ver que $k = \lfloor \sqrt[3]{m^2k^2} \rfloor + \lfloor \sqrt{mk} \rfloor + 1$ tiene solución para algún entero positivo k.

Consideremos la función $f(k) = k - \lfloor \sqrt[3]{m^2k^2} \rfloor - \lfloor \sqrt{mk} \rfloor - 1$. Queremos encontrar un entero positivo k tal que $f(k) = 0$.

Tenemos que $f(1) = 1 - \lfloor \sqrt[3]{m^2} \rfloor - \lfloor \sqrt{m} \rfloor - 1 < 0$. Además,

$$f(k+1) - f(k) = 1 - (\lfloor \sqrt[3]{m^2(k+1)^2} \rfloor + \lfloor \sqrt{m(k+1)} \rfloor - \lfloor \sqrt[3]{m^2k^2} \rfloor - \lfloor \sqrt{mk} \rfloor) \leq 1$$

Finalmente, notemos que $\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty$ pues el término positivo tiene orden k y el negativo tiene orden $k^{\frac{2}{3}}$. De esta forma, habrá un primer entero positivo k' para el cual $f(k') \geq 0$ y como f aumenta a lo más de uno en uno, entonces $f(k') = 0$.