Proceso Selectivo para la XXIII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2016

- Primer examen selectivo: 12 de marzo
- Segundo examen selectivo: 2 de abril
- Tercer examen selectivo: 16 de abril
- Cuarto examen selectivo: 30 de abril
- Resultados finales: 4 de mayo
- XXIII IMC: 25 al 31 de julio

Examen selectivo C

Pienso que las razones para hacer matemáticas son similares a aquellas para hacer música o arte. Se trata de contribuir a un cierto entendimiento del mundo y de nosotros.
Manjul Bhargava, Medalla Fields 2014

C1. Determina todas las funciones periódicas continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no tengan un periodo mínimo.

Nota: Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica es una función para la cual existe un real $c \neq 0$ para el cual $f(x+c) = f(x)$ para todo real x. El *periodo mínimo* es el menor real $c \neq 0$ para el cual sucede lo anterior.

C2. Sean A y B matrices de 2×2 con entradas reales. Supongamos que existe $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ no constante tal que $p(AB) = p(BA)$. Demuestra que $AB = BA$ o que $p(AB) = \lambda I_2$ para algún real λ.

C3. Dados dos reales $a, b > 0$, consideremos la región del plano

$$R = \left\{ (x, y) : |x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{b}{2} \right\}.$$

Llamemos p_1, p_2, p_3 y p_4 a los vértices del rectángulo que es frontera de R. Sea $f : R \to \mathbb{R}$ la función

$$f(p) = \sum_{i=1}^{4} ||p - p_i||.$$

Determina el rango de f.

C4. Supongamos que están dados n puntos en una recta de tal forma que todo $r > 0$ es la distancia de a lo más dos pares de estos puntos. Demuestra que hay al menos $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ reales positivos distintos que son la distancia de exactamente una pareja de estos puntos.

C5. Encuentra todos los enteros positivos m y n tales que

$$13^m + 3 = n^2.$$

Examen selectivo C
Soluciones

C1. Probaremos que si f es continua y periódica, pero no tiene un periodo mínimo, entonces es constante.

Sea f una función continua, periódica y sin periodo mínimo. Sea P el conjunto de reales que son periodos positivos de f. Este conjunto está acotado inferiormente por 0 y no es vacío, de modo que tien un ínfimo c. Afirmamos que $c = 0$.

En efecto, si $c \neq 0$ y $(c_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de periodos de f que converge a $c > 0$, de la continuidad de f se sigue que c o bien $c = 0$, o bien c también es periodo de f. Si c también es periodo, entonces el ínfimo c también es mínimo, lo cual es una contradicción. Así, $c = 0$.

Consideremos una sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ de periodos de f que converja a 0. El conjunto

$$A = \{mc_n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

es denso en $\mathbb{R}$, y $f(a) = f(0)$ para cualquier $a \in A$, por lo tanto f es constante.

□

C2. El polinomio característico de una matriz X de 2×2 es $t^2 - \mathrm{tr}(X)t + \det(X)$. Además, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ y $\det(AB) = \det(BA)$. Así, AB y BA tienen el mismo polinomio característico $h(t)$. Usando el algoritmo de la división para escribir $p(t) = q(t)h(t) + at + b$, como $h(AB) = h(BA) = O_2$, entonces

$$O_2 = p(AB) - p(BA) = a(AB - BA).$$

Se sigue que $AB = BA$, o que $a = 0$, en cuyo caso $p(AB) = bI_2$.

□

C3. El rango de f es un intervalo cerrado porque R es compacto y conexo, cuyos extremos son los valores máximo y mínimo de f. Si $I_t = R \cap \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}\}$, es fácil probar que f restringida a I_r alcanza su máximo en los extremos de I_r, y su mínimo en el centro. Con esto se ve que f alcanza sus valores mínimo y máximo en el centro y en cualquier vértice de R, respectivamente. Por lo tanto

$$f(R) = \left[2\sqrt{a^2 + b^2}, a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\right].$$

□

C4. Supongamos que los puntos son números reales $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Para cada $1 \leq i \leq n$, consideremos el conjunto $A_i = \{p_j - p_i \mid i < j\}$.

Probaremos que $|A_i \cap A_j| \leq 1$ si $i < j$. Si existieran $u, v \in A_i \cap A_j$ distintos, digamos

$$u = p_{k_1} - p_i = p_{k_2} - p_j \quad \text{y} \quad v = p_i - p_{l_1} = p_j - p_{l_2},$$

entonces $p_j - p_i = p_{k_2} - p_{k_1} = p_{l_2} - p_{l_1}$, lo cual no es posible.

Ahora llamemos d_1 y d_2 respectivamente a la cantidad de distancias realizadas una y dos veces. Como cada distancia se realiza una o dos veces, entonces el total de distancias es $d_1 + d_2$. Por otro lado, podemos acotar este total de distancias como sigue. Primero tomemos una $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y notemos la siguiente cota:

$$\begin{aligned}
|A_i \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})| &= |A_i \setminus ((A_i \cap A_1) \cup \cdots \cup (A_i \cap A_{i-1}))| \\
&\geq |A_i| - |A_i \cap A_1| - \cdots - |A_i \cap A_{i-1}| \\
&\geq (n-i) - (i-1) = n - 2i + 1.
\end{aligned}$$

Juntando todas estas cotas se obtiene que:

$$\begin{aligned}
d_1 + d_2 = |A_1 \cup \cdots \cup A_n| &= \left| \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right| \\
&\geq (n-1) + (n-3) + \cdots + \left(n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right),
\end{aligned}$$

es decir, $d_1 + d_2$ es mayor o igual que $n^2/4$ si n es par, o $(n^2 - 1)/4$ si n es impar.

Además, recordando que cada distancia se alcanza una o dos veces tenemos que $d_1 + 2d_2 = \binom{n}{2}$. Esto combinado con la desigualdad del párrafo anterior implica que $d_1 \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

□

C5. Tomemos una solución (m, n) de la ecuación. Manipulando algebraicamente y factorizando con diferencia de cuadrados, tenemos la siguiente igualdad:

$$(4 - \sqrt{3})^m (4 - \sqrt{3})^m = 13^m = (n - \sqrt{3})(n + \sqrt{3}). \tag{1}$$

Se puede verificar rápidamente que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es un dominio euclideano con norma N dada por

$$N(a + b\sqrt{3}) = |a^2 - 3b^2|,$$

de modo que $\mathbb{Z}[3]$ es un dominio de ideales principales y por lo tanto un dominio de factorización única.

Supongamos que existe un primo $p \in \mathbb{Z}[3]$ que divide tanto a $n - \sqrt{3}$ como a $n + \sqrt{3}$. Entonces:

$$N(p) \mid N(n + \sqrt{3}) = |n^2 - 3| = 13^m.$$

Por otro lado, como $p \mid 2\sqrt{3}$, tenemos que $N(p) \mid N(2\sqrt{3}) = 12$. Pero $(12, 13^m) = 1$, por lo cual concluimos que $N(p) = 1$, lo cual es una contradicción a p primo. Esto muestra que $(n - \sqrt{3}, n + \sqrt{3}) = 1$.

Así, a partir de (1) concluimos que $n+\sqrt{3}$ es una potencia m-ésima. Más aún, como $4-\sqrt{3}$ y $4+\sqrt{3}$ son primos podemos concluir que $(4+\sqrt{3})^m = n+\sqrt{3}$. Usando binomio de Newton y comparando coeficientes de $\sqrt{3}$ obtenemos:

$$1 = \sum_k \binom{m}{2k+1} 3^k 4^{m-(2k+1)} = m4^{m-1} + (\text{términos} \geq 1).$$

Así, m debe ser igual a 1. De la ecuación original se concluye que la única solución es $(1,4)$.

$\square$