Proceso Selectivo para la XXIII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2016

- Primer examen selectivo: 12 de marzo
- Segundo examen selectivo: 2 de abril
- Tercer examen selectivo: 16 de abril
- Cuarto examen selectivo: 30 de abril
- Resultados finales: 4 de mayo
- XXIII IMC: 25 al 31 de julio

Examen selectivo B

Algunas veces la belleza está en el enunciado matemático y algunas veces en el uso de herramientas matemáticas. Cuando se combinan de manera inesperada ambas cosas, entonces es algo en lo que quiero trabajar

Arthur Avila, Medalla Fields 2014

B1. Encuentra el menor entero positivo n tal que $20n$ y $16n$ tienen la misma cantidad de divisores.

B2. Determina el valor de la suma

$$\sin^2 4^\circ + \sin^2 8^\circ + \sin^2 12^\circ + \ldots + \sin^2 176^\circ.$$

B3. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y))$$

para todos los números reales x y y.

B4. Sea n un entero mayor que 2. Se tiene un conjunto X de n puntos en el plano en posición general. ¿De cuántas formas puede partirse este conjunto X en dos conjuntos cuyas envolventes convexas sean ajenas?

Nota: Un conjunto de puntos está en posición general si no tiene tres puntos alineados. Partir el conjunto X se refiere a dar dos conjuntos ajenos y no vacíos cuya unión sea X. La envolvente convexa de un conjunto A es el menor conjunto convexo (de acuerdo a la contención) que contiene a A.

B5. Sea n un entero mayor que 1. Sea $V = \mathbb{C}^n$ el espacio vectorial complejo de dimensión n. Considera la transformación lineal $\phi : V \to V$ dada por:

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$$

- Encuentra los eigenvalores de ϕ y una base ortogonal de V de eigenvectores de ϕ.
- Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cinco reales tales que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1$$

Determina el máximo valor que puede tener $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_1$.

Examen selectivo B
Soluciones

B1. Primero veremos que la mínima n solo tiene como factores primos a 2 y 5. Si n tuviera otro factor primo p, entonces $\frac{20n}{p}$ y $\frac{16n}{p}$ tendrían la misma cantidad de divisores (pues $(20,p)=1$ y $(16,p)=1$), de modo que $\frac{n}{p}$ sería un número menor que satisface las condiciones, contradiciendo la minimalidad.

Así, existen a y b enteros no negativos para los cuales $n=2^a5^b$. De este modo $20n=2^{a+2}5^{b+1}$ y $16n=2^{a+4}5^b$. Por lo tanto la igualdad de cantidad de divisores se traduce en la ecuación en enteros

$$(a+3)(b+2)=(a+5)(b+1).$$

Simplificando esta igualdad se obtiene $a=2b-1$ y así $n=2^{2b-1}5^b$. Para minimizar este valor cuidando que $2b-1\geq 0$, ponemos $b=1$. De este modo, el menor entero que funciona es $n=10$.

$\square$

Nota: Otra forma de resolver el problema es llegar a que n sólo tiene factores primos 2 y 5, luego descartar 1, 2, 4, 5, 8 a mano y ver que 10 funciona.

B2. A partir de la identidad trigonométrica $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ la suma se puede reescribir como

$$\frac{1-\cos 8^\circ}{2}+\frac{1-\cos 16^\circ}{2}+\cdots+\frac{1-\cos 352^\circ}{2}=\frac{44}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos 8^\circ+\cos 16^\circ+\ldots+\cos 352^\circ\right).$$

Para estudiar la suma de cosenos usaremos raíces n-ésimas de la unidad.

Tomemos α una raíz primitiva 45-ésima de la unidad. Sabemos que $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{44}=0$, de modo que $\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{44}=-1$. Al tomar la parte real a la izquierda obtenemos la suma de cosenos que teníamos pendiente, pues la parte real de α^n es $\cos 8n^\circ$. De esta forma, la suma que queremos determinar es igual a $\frac{44}{2}-\frac{1}{2}(-1)=\frac{45}{2}$.

$\square$

Nota: Otra forma de resolver el problema es mediante la identidad trigonométrica de suma a producto en $\sin 3a-\sin a$, $\sin 5a-\sin 3a$, etc. Esto permite hacer una suma telescópica. Dejamos los detalles al lector.

B3. Llamemos $P(x,y)$ a la igualdad de la hipótesis. Definamos $a:=f(0)$ y $c:=f(-1)$. Observemos lo siguiente:

- Con $P(0,0)$ obtenemos $f(a)=-2a$.
- Con $P(1,0)$ obtenemos $f(1)=-f(a)=2a$.
- Con $P(1,1)$ obtenemos $f(f(1))=0$
- Con $P(0,1)$ obtenemos $a=a+a+f(f(1))=2a$, de modo que $a=0$.

- De este modo, $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$.
- Con $P(0, x)$ obtenemos $f(f(x)) = 0$.
- Con $P(x, 0)$ obtenemos $f(x^2) = 0$. Esto muestra que la función es cero para todos los reales positivos.

Juntando las últimas dos observaciones podemos simplificar $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ definida como

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy).$$

Con $Q(m^2, -1)$ obtenemos que $f(-m^2) = m^2 f(-1) = cm^2$, lo cual muestra que $f(x) = -cx$ para todos los reales negativos x. Tenemos que ser cuidadosos pues falta un análisis de c.

- Si $c < 0$, tendríamos $0 = f(f(-1)) = f(c) = -c^2$, una contradicción.
- Si $c > 0$, la función que obtenemos es solución y queda definida por partes. En los positivos es cero y en los negativos es $f(x) = -cx$.
- Si $c = 0$, tenemos que f es la función constante 0, que en efecto es solución.

□

B4. La respuesta es $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Observemos que si tenemos una partición de X que funcione, entonces podemos dibujar una recta que divida a ambas envolventes convexas. Del mismo modo, cada recta que tenga al menos un punto en cada semiplano que define induce una partición válida para X. Con estas ideas, daremos una biyección entre el número de particiones válidas y parejas de puntos en X.

Tomemos una partición válida de X que induce envolventes convexas disjuntas A y B. Tomemos ℓ una recta que separa a A y B. Rotemos ℓ en el sentido de las manecillas del reloj hasta que no podamos hacerlo más sin tocar el interior de A o B. Afirmamos que esto sucede cuando ℓ toca tanto a A como a B en un punto. En efecto:

- Si ℓ no toca a ninguno de los dos, entonces se puede seguir rotando.
- Si ℓ toca a $A \cup B$ sólo en un punto p, este punto es un vértice de A o B, y podemos usarlo como pivote para seguir rotando ℓ.
- Si ℓ toca a A (o a B) en dos puntos x, y, entonces uno de ellos sirve como pivote para seguir rotando.
- La recta ℓ no puede tocar a tres o más puntos, pues X está en posición general.

De esta forma, el único caso en el que ℓ ya no se puede rotar es cuando toca exactamente un vértice de A y uno de B. Así, a cada partición válida le podemos asignar una pareja de vértices de X. Esta pareja es única por lo siguiente. Si tenemos otra recta m que no puede girar más, entonces debe tener la misma pendiente que ℓ pues de otra forma usando como pivote $m \cap \ell$ llegamos a una contradicción para una de ellas. Además de ℓ, sólo puede haber otra recta tangente a A en la dirección de ℓ. Pero esta otra recta no sirve, pues no separa a A y B. Esto muestra que ℓ es m.

Ahora veamos que esta asignación de pareja de puntos es inyectiva. Esto se debe a lo siguiente. Supongamos que a la partición de X le correspondieron los puntos p y q. Entonces p está en una parte y q en otra. Más aún, un punto r está en la misma parte que p si el triángulo qpr está en sentido horario, y está en la misma parte que q si el triángulo pqr está en sentido horario. De esta forma, si a dos particiones le corresponde la misma pareja de puntos, entonces las particiones son iguales.

Finalmente, la asignación de pareja de puntos es sobre. Si tenemos una pareja de puntos p y q, basta tomar la recta por ellos dos, girarla ligeramente en sentido antihorario en p y luego en sentido antihorario para separarse de q. La partición inducida le corresponde como pareja de puntos p y q.

Esto muestra que la asignación de partición válida a pareja de puntos de X es biyectiva. De este modo, hay tantas particiones válidas como parejas de puntos de X, es decir, $\binom{n}{2}$.

$\square$

B5. Una forma de encontrar los eigenvalores es la siguiente. Notemos que la transformación ϕ^n es la identidad, pues las entradas se recorren n veces y vuelven a su posición original. Así, $\phi^n - I = 0$.

Por otro lado, ningún polinomio de grado menor que n puede anular a ϕ, lo cual se puede ver mediante el vector $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ pues ϕ^j con $j < n$ no recorrerá el 1 suficientes veces para regresar a su posición original. Esto muestra que el polinomio mínimo es de grado n, así que debe ser $x^n - 1$ (y coincide con el polinomio característico). Esto muestra que los eigenvalores son las raíces n-ésimas de la unidad.

Ahora, sea α una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$ consideremos el siguiente vector en V:

$$v_j = \left(1, \alpha^j, \alpha^{2j}, \ldots, \alpha^{(n-1)j}\right).$$

Notemos que $\alpha^j v_j = \left(\alpha^j, \alpha^{2j}, \ldots, \alpha^{(n-1)j}, 1\right) = \phi(v_j)$. Es decir, v_j es eigenvector para el eigenvalor α^j. Afirmamos que $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es la base de eigenvectores ortogonales que buscamos. En efecto, es una base consiste de n eigenvectores correspondientes a eigenvalores distintos. Para ver que es ortogonal, tomemos dos índices distintos $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ y recordemos la definición de producto interno en el espacio complejo

$$\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{ki} \cdot \overline{\alpha^{kj}} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k(i-j)}.$$

Como $i - j$ no es un múltiplo de n, podemos usar la identidad $1 + \alpha^{i-j} + \alpha^{2(i-j)} + \ldots + \alpha^{(n-1)(i-j)} = 0$. Con esto obtenemos la perpendicularidad deseada y terminamos el inciso a).

$\square$

Resolveremos el siguiente problema en general: Para un entero $n > 2$ y n reales $a_1, \ldots, a_n$ tales que

$$a_1 + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$
$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1, \tag{2}$$

determinar el valor máximo de $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1$.

Tomemos la base ortogonal de V de eigenvectores de ϕ como en el inciso a). Notemos que queremos maximizar $\langle\, a, \phi(a)\rangle$ para los vectores de reales $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que satisfacen las igualdades (1) y (2). Podemos expresar a a como en términos de la base como

$$a = \sum_{j=0}^{n-1} c_j v_j.$$

Recordemos que podemos calcular c_j como $\frac{\langle\, a, v_j\rangle}{|v_j|^2}$. Como $v_0 = (1, 1, \ldots, 1)$, por la hipótesis (1) tenemos que $c_0 = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = 0$. Calculamos el producto interno $\langle\, a, \phi(a)\rangle$ y lo acotamos como sigue:

$$\begin{aligned}
\langle\, a, \phi(a)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} c_i v_i\,, \sum_{i=1}^{n-1} c_i \phi(v_i) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle c_i v_i\,,\, c_i \alpha^i v_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^{-i} |c_i v_i|^2 = \mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^{-i} |c_i v_i|^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} |c_i| \cdot \mathrm{Re}(\alpha^i) \cdot |v_i|^2 \leq \max_{i=1,\ldots,n-1} (\mathrm{Re}(\alpha^i)) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} |c_i v_i|^2 \\
&= \max_{i=1,\ldots,n-1} (\mathrm{Re}(\alpha^i)) \cdot \langle\, a, a\rangle = \max_{i=1,\ldots,n-1} (\mathrm{Re}(\alpha^i)) \\
&= \cos \frac{2\pi}{n}.
\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad se usó la hipótesis (2).

Esto acota $\langle\, a, \phi(a)\rangle$ y en efecto se puede alcanzar la igualdad. Basta tomar $a = \frac{v_1+v_{n-1}}{|v_1+v_{n-1}|}$. Este es un vector de entradas reales. Claramente es unitario, es decir, cumple hipótesis (2). Además, por identidades de raíces unitarias de la unidad cumple la hipótesis (1). Finalmente, en la cadena de desigualdades este vector alcanza todas las igualdades pues

$$\mathrm{Re}(v_1) = \mathrm{Re}(v_{n-1}) = \cos \frac{2\pi}{n}.$$

$\square$

Nota: El problema original únicamente consistía del inciso b). Este es un problema de desigualdades en el cual las ideas de álgebra lineal forman una parte fundamental de la solución.