Proceso Selectivo para la XXIII IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM
SUMEM

Indicaciones

Espera la indicación para voltear esta hoja. Mientras tanto, lee estas instrucciones

- El proceso selectivo de la IMC consiste de 4 exámenes. Únicamente se considerarán los mejores 3 exámenes de cada participante.
- Cada examen tiene una duración de 4 horas y media. Hay media hora para realizar preguntas acerca de los enunciados de los problemas.
- Cada problema vale 10 puntos y hay puntos por avances parciales. Después de cada examen los resultados parciales serán publicados.
- Puedes llevarte esta hoja de problemas. Puedes llevarte tus hojas borrador, pero es recomendable dejarlas pues puede haber puntos en ellas.
- Escribe las soluciones de los problemas en las hojas blancas. En la esquina superior derecha de cada hoja escribe tu nombre (o iniciales) y el número de problema. Puedes usar ambos lados de la hoja, pero no escribas más de un problema en una misma hoja.

Cronograma 2016

- Primer examen selectivo: 12 de marzo
- Segundo examen selectivo: 2 de abril
- Tercer examen selectivo: 16 de abril
- Cuarto examen selectivo: 30 de abril
- Resultados finales: 4 de mayo
- XXIII IMC: 25 al 31 de julio

Examen selectivo A

Me gusta cruzar las fronteras imaginarias que la gente establece entre diferentes áreas, es muy refrescante. Hay montones de herramientas y no sabes cuál de ellas funcionará. Se trata de ser optimista y de intentar conectar cosas.

Maryam Mirzakhani, Medalla Fields 2014

A1. Para un entero positivo n consideramos un tablero de $n \times n$. Una *semitorre* es una pieza que se pone en una casilla del tablero apuntando hacia una (y sólo una) de las direcciones arriba, abajo, derecha o izquierda.

¿Cuál es el máximo número de semitorres que se pueden poner de modo que no haya dos de ellas A y B tales que A apunte a B?

Nota: Las semitorres pueden tener direcciones distintas. A lo más se puede colocar una semitorre en cada casilla. Una semitorre que apunte a la derecha, apunta hacia las casillas en su misma fila y que queden a la derecha. De manera similar se define a cuáles casillas apuntan las semitorres que apuntan hacia la izquierda, arriba o abajo.

A2. Encuentra el área de la región definida por $x^2 + y^2 \leq |x| + |y|$.

A3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que para cada $x \in \mathbb{R}$ algún término de la sucesión

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

es igual a 1. Muestra que $f(1) = 1$.

A4. Sean A y B matrices de 2017×2017. Muestra que existen números reales a y b no ambos cero para los cuales la matriz $aA + bB$ no es invertible.

A5. Sea $a(n)$ el mayor factor primo del entero positivo n. Muestra que la serie

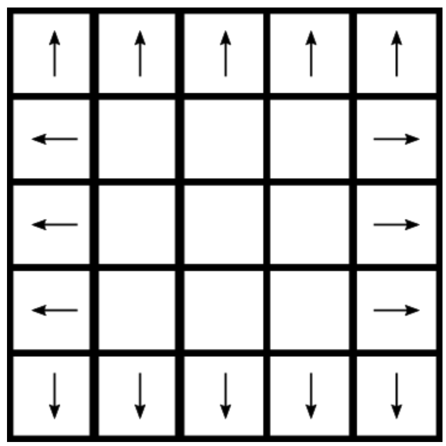
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na(n)}$$

es convergente.

Examen selectivo A
Soluciones

A1. Si $n = 1$ claramete el máximo es 1, así que supongamos $n \geq 2$.

Daremos un acomodo que tiene $4n-4$ semitorres. Colocamos en la primer fila puras semitorres que apuntan hacia arriba, en la última puras que apuntan hacia abajo. En las casillas sobrantes de la primer columna puras que apuntan hacia la izquierda y en las casillas sobrantes de la última columna puras que apuntan hacia la derecha. El dibujo muestra el ejemplo para $n = 5$.



Ahora veremos que no podemos poner más de $4n - 4$ semitorres. Podemos pensar que cada semitorre apunta hacia una semibanda de ancho 1 que continúa incluso fuera del tablero. Consideremos los $4n$ segmentos unitarios que rodean el tablero. La semibanda de cada semitorre cubre exactamente uno de estos segmentos.

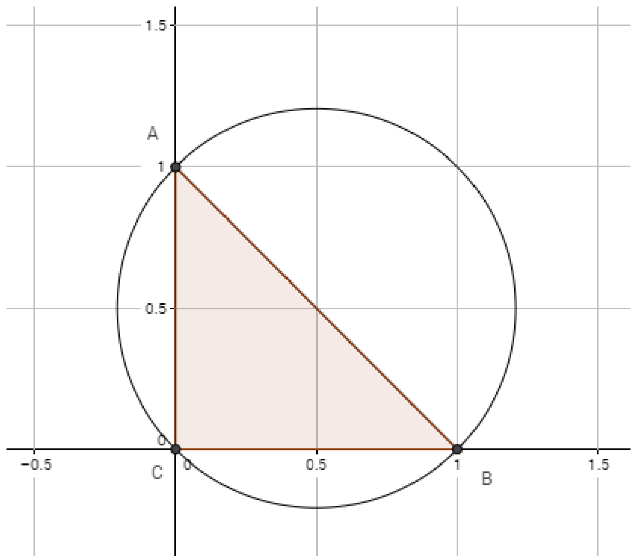
Si las bandas correspondientes a dos semitorres cubren el mismo segmento, entonces una de esas semitorres apunta a la otra. De este modo, con este argumento mostramos que hay a lo más $4n$ torres. Sin embargo, podemos refinarlo. Si la semibanda de la semitorre A cubre a uno de los segmentos que tocan una esquina del tablero, entonces A está en la orilla del tablero y por lo tanto tiene otro segmento de la orilla en su casilla. Este segmento también queda bloqueado pues si una semibanda lo cubriera, la semitorre correspondiente apuntaría a A.

De esta forma, si pudiéramos colocar $4n - 4 + j$ semitorres, sus bandas correspondientes cubrirían al menos $4 + j$ segmentos exteriores y las torres correspondientes bloquearían otros $4 + j$. Además, las bandas de las semitorres interiores cubrirían $4n - 8$ segmentos exteriores. Los $4n - 4 + j$ segmentos cubiertos y los $4 + j$ segmentos bloqueados exceden el total de $4n$ segmentos que hay, por lo cual se obtendría una contradicción.

A2. La respuesta es $2 + \pi$. Primero notamos que la desigualdad se da para (x, y) si y sólo si se da para $(\pm x, \pm y)$ para cualquier elección de signos, así que basta encontrar el área en el primer cuadrante y multiplicar por 4.

En el primer cuadrante tenemos la desigualdad $x^2+y^2 \leq x+y$, que es equivalente a $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$. En todo el plano, esto define el interior de la circunferencia centrada en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pero en el primer cuadrante consiste de la mitad de dicha circunferencia y de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. De esta forma, en el primer cuadrante el área es $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. Así, el área total que nos interesa es $2 + \pi$.



A3. Primero mostraremos que el único punto fijo de f es 1. En efecto, supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es un punto fijo. Entonces por la hipótesis, 1 está en la sucesión $c, c, c, \ldots$ y por lo tanto $c = 1$.

Ahora, supongamos que $f(1)$ no es 1. Entonces f no tiene puntos fijos, de modo que la función contínua $f(x) - x$ no pasa por 0. De esta forma, por el teorema del valor intermedio tiene que permanecer por arriba de 0 o bien por abajo de 0.

Si $f(x) - x > 0$ para todo real x, entonces $f(1) > 1$, $f(f(1)) > f(1) > 1$, e inductivamente toda iteración es mayor que 1. Esto contradice la hipótesis del problema. El caso $f(x) - x < 0$ para todo real x se descarta de manera análoga.

Esto muestra que $f(x)$ tiene puntos fijos y por lo tanto $f(1) = 1$.

A4. Si A no es invertible, entonces $(a, b) = (1, 0)$ es una solución. Análogamente, si B no es invertible entonces $(a, b) = (0, 1)$ da una solución. Así que podemos suponer que A y B son invertibles y por lo tanto sus determinantes no son 0.

Supongamos que $\det(A)$ y $\det(B)$ tienen signo diferente. Consideremos la función $f(t) = \det(tA + (1 - t)B)$. Ésta es una función contínua con $f(0) = \det(B)$ y $f(1) = \det(A)$, dos números con signos diferentes. Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio existe un valor t entre 0 y 1 para el cual $f(t) = 0$. De este modo, podemos tomar $a = t$, $b = 1 - t$ para satisfacer lo que pide el problema.

Ahora, supongamos que $\det(A)$ y $\det(B)$ tienen el mismo signo. Consideremos la función $f(t) = \det(tA - (1 - t)B)$. De nuevo tenemos una función continua, en la que ahora $f(1) = \det(A)$ y $f(0) = \det(-B) = (-1)^{2017} \det(B) = -\det(B)$ de nuevo son dos números con signos distintos. Una vez más, el teorema del valor intermedio nos da un valor t entre 0 y 1 para el cual $f(t) = 0$. Así, podemos tomar $a = t$, $b = t - 1$ para satisfacer lo que pide el problema.

A5. Como todos los términos son positivos, la sucesión es convergente si y sólo sí es absolutamente convergente, así que podemos reordenar los sumandos como queramos para estudiar la convergencia. Los acomodaremos de acuerdo al valor de $a(n)$.

Llamemos a los números primos en orden p_1, p_2, ... Si para un número tenemos $a(n) = p_k$, entonces n es de la forma

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}.$$

en donde a_1, a_2, ..., a_{k-1} son enteros no negativos y a_k es un entero positivo.

De este modo, al estudiar la suma para $a(n)$ fijo e igual a p_k obtenemos lo siguiente

$$\sum_{n:a(n)=p_k} \frac{1}{na(n)} = \sum_{a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}\geq 0, a_k\geq 1} \frac{1}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}} \cdot \frac{1}{p_k}.$$

Usando para cada p_j la serie geométrica

$$1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} = \frac{p_j}{p_j - 1}$$

y multiplicando todas estas, obtenemos que

$$\sum_{n:a(n)=p_k} \frac{1}{na(n)} = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{p_j}{p_j - 1} \right) \cdot \frac{1}{p_k - 1} \cdot \frac{1}{p_k}.$$

Observemos que para $k = 1$ el primo correspondiente es 2 y esta suma es $\frac{1}{2}$.

Ahora daremos una cota superior para el producto cuando $k \geq 2$. Notemos primero que es sencillo demostrar inductivamente que $p_j \geq 2j - 1$, pues a partir de 3 de un primo al siguiente la distancia es al menos 2. Ahora, por la expansión de Taylor de e^x tenemos $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \geq 1 + x$, de modo que $x \geq \log(1 + x)$ para todo real positivo x. Juntando estas observaciones,

$$\log \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{p_j}{p_j - 1} \right) = \sum_{j=1}^{k-1} \log \left(\frac{p_j}{p_j - 1} \right) = \sum_{j=1}^{k-1} \log \left(1 + \frac{1}{p_j - 1} \right) \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{p_j - 1} \leq 1 + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{1}{2j - 2} = 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k - 2} \right).$$

A la derecha tenemos la serie armónica hasta $k - 2$, que se puede acotar superiormente de manera estándar mediante $1 + \log(k - 1)$

De esta forma, resumiendo todo tenemos

$$\log\left(\prod_{j=1}^{k-1}\frac{p_j}{p_j-1}\right)\leq 1+\frac{1+\log(k-1)}{2}.$$

Tomando la función exponencial de ambos lados, tenemos que el producto queda acotado por

$$e^{3/2}\sqrt{k-1}.$$

Con este estimado podemos regresar a la serie que estábamos estudiando. Recordemos que ya estamos en el caso $k\geq 2$.

$$\sum_{n:a(n)=p_k}\frac{1}{na(n)}\leq e^{3/2}\sqrt{k-1}\cdot\frac{1}{p_k-1}\cdot\frac{1}{p_k}\leq e^{3/2}\cdot\frac{\sqrt{k-1}}{(2k-2)(2k-1)}.$$

Así, cada suma es del orden $k^{-\frac{3}{2}}$, de modo que la serie original converge por criterio de comparación con la serie $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\frac{3}{2}}$.