Proceso Selectivo para la XXI IMC, Bulgaria

Facultad de Ciencias UNAM
Instituto de Matemáticas UNAM

Cuarto examen selectivo

"Un GRAN descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si desafía tu curiosidad y pone en marcha tu ingenio, y además logras resolverlo por tu cuenta, entonces puedes experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento."
George Polya, *How to solve it*

4A) Un conjunto *admisible* es un conjunto de 6 puntos en el plano tal que ninguna línea pasa por 3 de ellos. Un *emparejamiento bueno* para un conjunto admisible S consiste de 3 segmentos tales que:

- Cada segmento tenga extremos en dos puntos de S.
- Ningún par de segmentos se intersecte.

Encuentra un conjunto admisible que tenga 12 emparejamientos buenos y muestra que en efecto los tiene.

4B) La sucesión $\{a_n\}$ está definida por $a_1 \in (0,1)$ y $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$ para $n \geq 1$. Muestra que $\lim_{n\to\infty} na_n$ existe y es igual a 1.

4C) Sea n un entero positivo y A la matriz de $n \times n$ con entradas $a_{ij} = ij$. Para x un real, definimos $f(x) = \det(xA + E)$, donde E es la matriz identidad de $n \times n$. Sea f' la derivada de f. Determina $f'(0)$.

Nota: Recuerda que la matriz xA se obtiene multiplicando cada entrada de A por x.

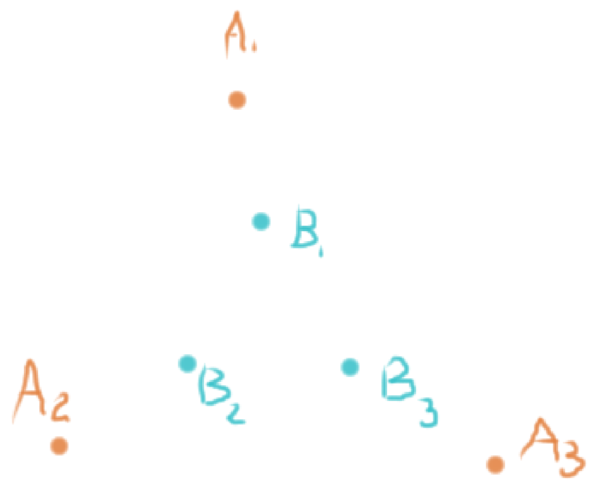
4D) Sea m un entero positivo tal que $m \equiv 2 \pmod 4$. Muestra que existe a lo más una factorización $m = ab$ en donde a y b son enteros positivos que satisfacen

$$0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m+1}}.$$

4E) Sea P un poliedro tal que todas sus aristas son congruentes entre sí y tangentes a una esfera dada. Supongamos que una de las caras de P tiene una cantidad impar de lados. Muestra que todos los vértices de P están en una misma esfera.

Soluciones

4A) El siguiente es conjunto admisible con 12 emparejamientos buenos:



Para verificar que tiene 12 emparejamientos buenos contamos como sigue:

- Si existe algún segmento del estilo AA, entonces existe un segmento del estilo BB. Hay 3 formas de elegir el segmento AA y 3 formas de elegir el BB y cualquier forma de elegirlos se puede completar a un emparejamiento bueno. Esto da $3 \cdot 3 = 9$ emparejamientos buenos.
- Si no, entonces todos los segmentos son del estilo AB. Una vez que elegimos la pareja de A_1, queda determinado uno y sólo un emparejamiento bueno. Entonces hay 3 de este estilo.

Nota: Se puede mostrar que la máxima cantidad de emparejamientos buenos que puede tener un conjunto admisible es 12.

4B) Tomemos la función $f(x) = x(1-x)$. Notemos que $f'(x) = 1 - 2x$ y entonces $f'(x) > 0$ para $x \in (0, \frac{1}{2})$, es decir, la función es creciente en $(0, \frac{1}{2})$.

Lo primero que haremos es mostrar inductivamente que para $n \geq 1$ tenemos $0 < a_n < \frac{1}{n}$. Para $n = 1$ esto es consecuencia de la hipótesis del problema. Para $n = 2$, como $a_1 \in (0,1)$, entonces $a_2 = a_1(1-a_1) > 0$ pues ambos factores son positivos. Por otro lado, por la desigualdad MA-MG, $a_2 = a_1(1-a_1) \leq \left(\frac{a_1+(1-a_1)}{2}\right) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Supongamos que en efecto para alguna $n \geq 2$ se vale $0 < a_n < \frac{1}{n}$ y veamos que es válido para $n+1$. Una vez más, cada factor en $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$ es positivo, de modo que $a_{n+1} > 0$. Por hipótesis inductiva, $a_n < \frac{1}{n}$, de modo que:

$$a_{n+1} = f(a_n) < f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Como $n^2 - 1 < n^2$, dividiendo entre $n^2(n+1)$ obtenemos $\frac{n-1}{n^2} < \frac{1}{n+1}$. Esto muestra que $a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$, como queríamos. Así, $na_n < 1$.

Ahora fijemos un entero m. Mostraremos que para n suficientemente grande tenemos que $na_n > \frac{1}{\frac{1}{m}+1} - \frac{1}{m}$. Para esto, tomemos un entero k tal que

$$a_m > \frac{1}{(1+\frac{1}{m})(m+k)},$$

lo cual es posible pues $a_m > 0$. Mostraremos por inducción para $n \geq 0$ que

$$a_{m+n} > \frac{1}{(1+\frac{1}{m})(m+n+k)}.$$

Para $n = 0$ se obtiene por la forma en la que elegimos k. Supongamos que la proposición se vale para n y probémosla para $n+1$. Como f es creciente, tenemos que:

$$a_{m+n+1} = f(a_{m+n}) > f\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{m})(m+n+k)}\right) = \frac{1}{(1+\frac{1}{m})(m+n+k)} \cdot \frac{(1+\frac{1}{m})(m+n+k)-1}{(1+\frac{1}{m})(m+n+k)}$$

Nos bastaría entonces que

$$\frac{(1+\frac{1}{m})(m+n+k)-1}{(1+\frac{1}{m})^2(m+n+k)^2} > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)(m+n+k+1)}.$$

Reacomodando y cancelando un $\left(1+\frac{1}{m}\right)$, esto es equivalente a

$$(m+n+k+1)\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)(m+n+k)-1\right) > \left(1+\frac{1}{m}\right)(m+n+k)^2$$

Al desarrollar, en ambos lados aparece el término $\left(1+\frac{1}{m}\right)(m+n+k)^2$. Al cancelarlo y pasar los términos con signos negativos a la derecha, obtenemos que basta que

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)(m+n+k) > m+n+k+1.$$

Pero esto es evidente pues a la izquierda aparece $m+n+k$, un $1 = m \cdot \frac{1}{m}$ y otros términos positivos.

De esta forma, para $n \geq 0$ tenemos que

$$(m+n)a_{m+n} > \frac{m+n}{(1+\frac{1}{m})(m+n+k)}$$

Como el límite de la expresión de la derecha es $\frac{1}{1+\frac{1}{m}}$, entonces hay una n suficientemente grande tal que el lado derecho en la desigualdad anterior es mayor a $\frac{1}{1+\frac{1}{m}} - \frac{1}{m}$. Resumiendo todas estas ideas, para cualquier m, si n es suficiente grande entonces

$$1 > na_n > \frac{1}{1+\frac{1}{m}} - \frac{1}{m}.$$

A partir de aquí podemos concluir. Notemos que la expresión de la derecha se va a 1 conforme m se va a ∞. De modo para cualquier $\epsilon > 0$, si n es suficientemente grande, podemos encerrar a na_n entre $1-\epsilon$ y 1. Esto muestra que el límite existe y es igual a 1.

4C) Notemos que $f(x)$ es un polinomio en x de grado n, y por lo tanto es de la forma $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. De esta forma, $f'(0) = a_1$.

Para encontrar a_1, notemos que para obtener un término de grado 1 hay que elegir $n-1$ unos en la diagonal y uno de los términos del estilo $j^2 x$. Estos son los únicos n términos de grado 1. De esta forma,

$$f'(0) = a_1 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4D) Supongamos que existe una factorización así. Elevando al cuadrado obtenemos

$$0 < (a-b)^2 < 5 + 4\sqrt{4m+1}.$$

Sumando $4ab$ al término central y $4m = 4ab$ a los externos tenemos

$$4m < (a+b)^2 < 5 + 4m + 4\sqrt{4m+1} = (\sqrt{4m+1}+2)^2.$$

De modo que $\sqrt{4m} < a+b < \sqrt{4m+1}+2$. Como $a+b$ es entero y $4m$ no es un cuadrado (pues tiene exactamente 3 factores 2), entonces

$$\left\lfloor \sqrt{4m} \right\rfloor + 1 \leq a+b \leq \left\lfloor \sqrt{4m+1} \right\rfloor + 2.$$

Estudiemos cómo están relacionados $\lfloor \sqrt{4m} \rfloor$ y $\lfloor \sqrt{4m+1} \rfloor$. Si $x = \lfloor \sqrt{4m} \rfloor$, entonces $x < \sqrt{4m} < x+1$, de modo que $x^2 < 4m < x^2 + 2x + 1$, así que $x^2 + 1 \leq 4m \leq x^2 + 2x$. Sumando uno de ambos lados tenemos $x^2 + 2 \leq 4m + 1 \leq x^2 + 2x + 1$ y por lo tanto $\lfloor \sqrt{4m+1} \rfloor$ es igual a x o a $x+1$. De esta forma:

Si $\lfloor \sqrt{4m+1} \rfloor$ es x, entonces $x+1 \leq a+b \leq x+2$. Si tuvieramos una segunda factorización $m = cd$ que cumpliera las condiciones, para que realmente sea distinta $c+d \neq a+b$. De modo que sin pérdida de generalidad, $a+b+1 = c+d$. Sin embargo, como m es 2 módulo 4, uno entre a y b es par y el otro impar, de modo que $a+b$ es impar. De manera similar, $c+d$ es impar. Esto entra en contradicción con $a+b+1 = c+d$.

Si $\lfloor \sqrt{4m+1} \rfloor$ es $x+1$, entonces es por que se da la igualdad $4m+1 = x^2+2x+1$. De aquí vemos que x es par, digamos $2t$. Simplificando, obtenemos que $m = t(t+1)$. De este modo $2t+1 \leq a+b < 2t+3$ y de nuevo $a+b$ sólo tiene posibilidad de tomar su valor en dos números consecutivos. Esto nos permite repetir el argumento del caso anterior y por tanto concluir que existe a lo más una factorización como se pide.

4E) Sea O el centro de la esfera a la cual las aristas son tangentes y sea r su radio. Supongamos que la longitud común que comparten todas las aristas es e. Sea ℓ la longitud del lado de un triángulo isósceles con base e y altura r.

Pintaremos cada vértice A de verde, blanco y rojo dependiendiendo de si $AO = \ell$, $AO < \ell$ ó $AO > \ell$ (respectivamente). Supongamos que que AB es una arista de P.

- Si A es verde, entonces el triángulo AOB tiene un lado de medida ℓ, un lado de medida e y altura r hacia ese lado. Esto muestra que es congruente al isósceles que mencionalmos al inicio, de modo que $BO = \ell$ y por tanto B es verde.
- Si A es blanco, entonces $AO < \ell$, pero entonces el punto O queda en el lado de la mediatriz de AB que tiene a A, y a una distancia h de AB, de modo que $BO > \ell$ y por tanto B es rojo.
- De manera análoga, si A es rojo, entonces B es blanco.

Estamos listos para concluir. Si todos los vértices fueran blancos y rojos, entonces tendríamos una contradicción pues la cara que tiene una cantidad impar de vértices no se puede colorear alternadamente rojo y blanco.

De esta forma, hay al menos un vértice verde. Como en un poliedro se puede llegar de cualquier vértice a otro mediante aristas, entonces todos los vértices son verdes. Esto muestra que todos los vértices están en la esfera con centro O y radio ℓ.