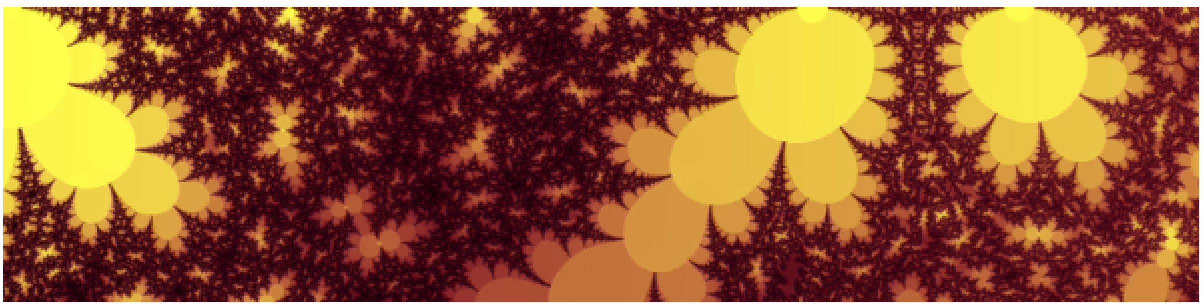
V Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2015
Segunda Etapa

Sábado 8 de agosto 2015

Bienvenido a la Segunda Etapa del Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether.



Instrucciones

- Lee con cuidado estas instrucciones antes de comenzar el examen.
- En cada hoja, en la esquina superior derecha, debes indicar tu nombre (o iniciales), el número de problema en el que estás trabajando y el número de hoja.
- Responde a las preguntas justificando cada uno de tus pasos. Cada problema se califica sobre 10 puntos y se darán puntos parciales por avances hacia la solución de un problema.
- Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.
- Tienes media hora para hacer preguntas acerca de las redacciones de los problemas y para pedir la definición de algún concepto que no entiendas.
- Tienes 4 horas y media para resolver el examen.
- Los resultados se darán a conocer en el transcurso de las siguientes dos semanas por correo electrónico.

Problemas

1. (10 puntos) Considera una sucesión de enteros positivos distintos $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Sabemos que para cualquier entero positivo k se tiene que aparecen exactamente k números de k dígitos en $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Determina si la serie

$$\sum_{n=1} \frac{1}{a_n}$$

siempre converge, siempre diverge o bien depende de la sucesión elegida.

2. (10 puntos) Determina todos los enteros positivos n para los cuales $2^n + 1$ divide a $n^3 + 25$.

3. (10 puntos) Sea a un real mayor que cero. La función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisface que $f(a) = 1$ y que para cualesquiera dos reales positivos x y y se tiene que

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{a}{x}\right) f\left(\frac{a}{y}\right) = 2f(xy).$$

Muestra que f es una función constante.

4. (10 puntos) Para un real x definimos $z(x)$ como el primer entero que se encuentra al ir de x hacia 0, por ejemplo, z de un entero es él mismo, $z(3.2) = 3$ y $z(-5.4) = -5$.

   Se colorean de azul 2015 puntos de coordenadas enteras en el plano. Si están coloreados de azul los puntos (a, b) y (c, d), se permite colorear de azul el punto

$$\left(z\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2+1}} \cdot c\right), z\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2+1}} \cdot d\right)\right).$$

   Muestra que no es posible colorear de azul una cantidad infinita de puntos.

5. (10 puntos) Sea n un entero positivo mayor o igual a 2 y r un entero tal que $1 \leq r \leq n - 1$. Consideremos una matriz A de $n \times n$ con entradas complejas y rango r.

   - Muestra que existen matrices B de $n \times r$ y C de $r \times n$ con entradas complejas y rango r tales que $A = BC$.
   - Muestra que la matriz A satisface una ecuación del estilo $P(A) = 0$ para P un polinomio grado $r + 1$ con coeficientes complejos.

6. (10 puntos) Un elemento a de un anillo R se le llama *regular* si para todo $x \neq 0$ en R se tiene que $ax \neq 0$ y $xa \neq 0$. Muestra que no existe un anillo con exactamente 5 elementos regulares.

   Nota: En este problema la multiplicación del anillo no necesariamente es conmutativa y no necesariamente tiene unidad. El anillo puede ser infinito.

Soluciones

1. Para una sucesión con las condiciones del problema siempre se tiene que la serie correspondiente converge. Vamos a mostrar esto.

   Como todos los sumandos en la serie son positivos, entonces la sucesión de sumas parciales es creciente. Así, para mostrar que la serie converge basta ver que las sumas parciales están acotadas. Notemos que cada número de k dígitos es mayor o igual a 10^{k-1}. De esta forma, los sumandos con denominador de k dígitos colaboran con a lo más $\frac{k}{10^{k-1}}$. Como $k \leq 2^{k-1}$ para todo entero positivo k, entonces estos sumandos colaboran con a lo más $\frac{2^{k-1}}{10^{k-1}} = \frac{1}{5^{k-1}}$.

   Así, al tomar una suma parcial tenemos que está acotada por la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^{k-1}}$.Esta es una serie geométrica que converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$. Así, $\frac{5}{4}$ es una cota para toda suma parcial y por lo tanto la serie converge. $\square$

2. Lo primero que haremos es mostrar que ningún entero mayor a 10 funciona. Para esto usaremos un argumento de tamaños. Mostraremos que para $n \geq 11$ se tiene que $2^n > n^3+24$. Procedemos por inducción. Para $n = 11$ tenemos 2048 en el lado izquierdo y 1355 en el lado derecho. Supongamos ahora que se cumple para una n mayor o igual a 11. Notemos que $n^3 \geq 11n^2$ y que $8n^2 \geq 3n$, así que

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n > 2(n^3+24) = n^3 + (n^3+24) + 24 > \\ &> n^3 + (11n^2+1) + 24 = n^3 + (3n^2+8n^2+1) + 24 \geq \\ &\geq n^3 + (3n^2+3n+1) + 24 = (n+1)^3 + 24. \end{aligned}$$

   Esto termina la inducción. Como consecuencia, el problema se reduce a estudiar los valores de n entre 1 y 10. Estos valores se pueden o bien verificar manualmente uno por uno, o bien descartar de manera un poco más sistemática. Un ejemplo para hacer esto es el siguiente:

   - Si n es impar, entonces $2^n + 1$ es múltiplo de 3 así que n debe ser 2 módulo 3. Esto descarta $n = 1, 3, 7, 9$.
   - Si n es 2 o 5, entonces $2^n + 1$ es múltiplo de 5 y n^3 no. Esto descarta $n = 2, 6$.
   - Para $n = 4$ no se cumple que 17 divida a 89. Para $n = 5$ no se cumple que 33 divida a 150. Finalmente, para $n = 8$ no se cumple que 257 divida a 537. Esto descarta $n = 4, 5, 8$.

   Así, el único candidato posible es 10 y en efecto funciona por que $2^{10}+1 = 1025 = 10^3+25$. $\square$

3. Denotaremos $S(x, y)$ a la substitución por x y y en la hipótesis.

   - $S(1, 1)$ dice que $f(1)^2 + f(a)^2 = 2f(1)$. Esto implica que $0 = f(1)^2 - 2f(1) + 1 = (f(1) - 1)^2$ y por lo tanto $f(1) = 1$.
   - $S(x, 1)$ dice que $f(x)f(1) + f\left(\frac{a}{x}\right) f(a) = 2f(x)$, que usando lo anterior y simplificando implica que $f\left(\frac{a}{x}\right) = f(x)$.

- De este modo la hipótesis original se transforma en $f(x)f(y) = f(xy)$. Evaluando en $x = y$ y usando lo anterior tenemos:

$$f(x^2) = f(x)f(x) = f(x)f\left(\frac{a}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{a}{x}\right) = f(a) = 1.$$

Como x^2 puede tomar cualquier valor positivo, esta última igualdad muestra que f es la función constante 1. $\square$

4. La primer observación es que la función z fija o disminuye el valor absoluto de cualquier real, es decir, $|z(x)| \leq |x|$. Esto se sigue de la definición de z. Si a un vector (x, y) le aplicamos z en cada una de sus coordenadas, tenemos que

$$|(z(x), z(y))|^2 = z(x)^2 + z(y)^2 \leq x^2 + y^2 = |(x, y)|,$$

es decir, aplicar la función z entrada a entrada en un vector no aumenta su norma.

Supongamos que de entre los puntos iniciales el que tiene mayor norma es (X, Y). Afirmamos que nunca obtendremos un punto con una norma mayor a la de (X, Y). Procedemos por inducción en la cantidad de pasos. El caso base (0 pasos) se sigue de la definición de (X, Y). Ahora, tomemos dos puntos pintados (a, b) y (c, d). Ya que la función z no aumenta las normas, el cuadrado de la norma del nuevo punto es a lo más

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2+1} \cdot c^2 + \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2+1} \cdot d^2 = \frac{c^2+d^2}{c^2+d^2+1} \cdot (a^2+b^2) < a^2+b^2 \leq X^2+Y^2.$$

Esto termina la inducción. Así, sólo podemos pintar puntos con coordenadas enteras que tengan norma menor o igual a $\sqrt{X^2+Y^2}$. Como de estos sólo hay una cantidad finita, el problema queda resuelto. $\square$

5. Llamemos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a las columnas de A de izquierda a derecha. Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$ generado por $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Como A tiene rango r, este subespacio tiene dimensión r. Tomemos una base $\{B_1, \ldots, B_r\}$ de este subespacio. Ya que este conjunto es base, entonces para cada i en $\{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos que existen constantes $c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ri}$ para las cuales

$$A_i = c_{1i}B_1 + c_{2i}B_2 + \ldots + c_{ri}B_r. \tag{1}$$

Proponemos entonces a B como la matriz que tiene a B_1, B_2, $\ldots$, B_r como columnas de izquierda a derecha y a C como la matriz $C = \{c_{ij}\}$. Precisamente por (1) y por multiplicación matricial tenemos que $A = BC$. Por contrucción B tiene rango r. El rango de C es al menos r pues si no $A = BC$ tendría rango menor que r. Finalmente, el rango de C no puede ser más que r pues es una matriz de $r \times n$. Esto resuelve el primer inciso.

Para resolver el segundo inciso usaremos el primero. Sea $P(x)$ el polinomio característico de CB. Como CB es una matriz de $r \times r$, tenemos que el polinomio es de grado r y por el teorema de Cayley-Hamilton CB es un cero de este polinomio. Afirmamos que A es cero del polinomio $xP(x)$. En efecto, $AP(A) = BP(CB)C = 0$. Esto termina el problema pues $xP(x)$ tiene grado $r + 1$. $\square$

6. El esbozo de la prueba es el siguiente:

   (a) En busca de contradicción, suponemos que existe un anillo R con 5 elementos regulares.

   (b) Entendemos algebraicamente el conjunto de elementos regulares de R.

   (c) Usamos esta información para construir un mapa $\varphi : T \to R$ donde T es un anillo que conocemos bien.

   (d) Usamos el primer teorema de isormorfismo para entender la imagen de φ.

   (e) Se llega a una cantidad finita de casos, cada uno de los cuales nos da una contadicción.

   Supongamos entonces que existe dicho anillo R con 5 elementos regulares. Sean $\cdot$ y $+$ las multiplicación y suma del anillo. Como es usual, obviaremos los $\cdot$ si el contexto es claro. Sea 0 el neutro aditivo. Llamemos G al conjunto de elementos regulares.

   Afirmación 1 G es cerrado bajo $+$, $\cdot$ y sacar inversos aditivos

   Demostración Mostraremos que G es cerrado bajo $\cdot$. Tomemos a y b en G. Si $abx = 0$ con x en R, por la regularidad de a tenemos que $bx = 0$ y luego por la regularidad de b tenemos que $x = 0$. Esto muestra que ab es regular y por lo tanto el conjunto de regulares es cerrado bajo multiplicación. El resto de las demostraciones son igual de sencillas y se siguen de las definiciones yh propiedades básicas de un anillo.

   $\square$

   Afirmación 2 $(G, \cdot)$ es un grupo isomorfo al grupo cíclico de 5 elementos.

   Demostración Sabemos que G tiene 5 elementos, así que basta probar que tiene estructura de grupo.

   - Por la Afirmación 1, se tiene que G es cerrado bajo $\cdot$.
   - Tomemos a, b y c en G. Supongamos que $ab = ac$. Entonces $a(b - c) = 0$ y como a es regular, tenemos que $b - c = 0$ y por lo tanto $b = c$. Análogamente $ba = ca$ implica $b = c$.
   - De esta forma, la multiplicación por la izquierda (o derecha) por a es inyectiva para todo a en G. Por el inciso anterior estas multiplicaciones son funciones de G en G y por lo tanto son biyectivas.
   - A partir de esto, existe un elemento e en G tal que $ae = a$. Afirmamos que e es el neutro multiplicativo. En efecto, si tomamos b en G, por la biyectividad mencionada podemos escribir $b = ya$ y por lo tanto $be = yae = ya = b$. En particular $ee = e$, así que de modo análogo se sigue que $eb = b$ para todo b en G.
   - La existencia de inversos se sigue inmediatamente de la biyectividad de las multiplicaciones izquierda y derecha.

   $\square$

Seguiremos llamando a e al neutro mulitplicativo de $(G, \cdot)$. Mostraremos que $e + e = 0$. De no ser así, tendríamos que $e \neq -e$ y por lo tanto $\{e, -e\}$ sería un subgrupo propio de G, pero esto es imposible pues 2 no divide a 5 y tendríamos una contradicción al teorema de Lagrange. De esta forma, $e + e = 0$, y para cualquier $a \in G$ tenemos que

$$a + a = ae + ae = a(e + e) = a \cdot 0 = 0.$$

Estamos listos para introducir el mapa φ. El anillo auxiliar será $\mathbb{Z}_2[x]$, los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Tomemos un elemento c de G diferente de e. Tomemos el mapa $\varphi : \mathbb{Z}_2[x] \to R$ tal que $\varphi(1) = e$, $\varphi(x) = c$ y que abre sumas y multiplicaciones. Como $e + e = c + c = 0$, este mapa está bien definido. Su imagen es un subanillo S de R, en donde e sirve como identidad, así que $\varphi : \mathbb{Z}_2[x] \to S$ es un homeomorfismo de anillos.

Daremos un último paso para olvidarnos de R. Recordemos que una unidad en un anillo es un elemento con inverso multiplicativo.

Afirmación 3 S tiene exactamente 5 unidades.

Demostración Notemos que G es generado por c, así que cada elemento regular de R es una unidad de S. El converso también es válido: si a es una unidad de S, entonces tiene inverso multiplicativo b, de modo que $ax = 0$ (resp. $xa = 0$) implica $bax = 0$ (resp. $xab = 0$), es decir $ex = 0$ (resp. $xe = 0$) y por lo tanto $x = 0$. Así que a es un elemento regular de R.

□

Por otro lado, por el primer teorema de isomorfismo de anillos, tenemos que S es isomorfo al anillo cociente $R/\ker(\varphi)$. Como $c^5 = e$, tenemos que $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ está en $\ker(\varphi)$. De este modo, S es isomorfo a un subanillo de

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^5 - 1) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x - 1) \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_{16}.$$

Las únicas posiblidades son que S sea 0, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{F}_{16}$ o bien $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_{16}$. En los primeros dos casos tenemos que S tiene una unidad. Como $\mathbb{F}_{16}$ es un campo, en cada uno de los otros anillos tenemos 15 unidades. Cualquiera de estos casos contradice la Afirmación 3. Esto termina la prueba.

□