4to Concurso Unversitario de Matemáticas Galois-Noether 2014
Segunda Etapa

Sábado 9 de agosto 2014

Bienvenido a la Segunda Etapa del Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether

Instrucciones

- Lee con cuidado estas instrucciones antes de comenzar el examen.
- En cada hoja, en la esquina superior derecha, debes indicar tu nombre (o iniciales), el número de problema en el que estás trabajando y el número de hoja.
- Responde a las preguntas justificando cada uno de tus pasos. Cada problema se califica sobre 10 puntos y se darán puntos parciales por avances hacia la solución de un problema.
- Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.
- Tienes 4 horas y media para resolver el examen.
- Los resultados se darán a conocer en el transcurso de la semana por correo electrónico.

Problemas

1. (10 puntos) Sea α un número real tal que los números $2\alpha^2 + 3\alpha + 1$ y $6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha + 1$ son racionales. Muestra que α también es racional.

2. (10 puntos) Considera una sucesión de reales $\{x_i\}$ tal que para toda i se tiene $0 < x_i \leq 1$ y tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge. En una circunferencia de diámetro 1 tenemos una cuerda A_iB_i de longitud x_i para cada entero positivo i. No hay dos cuerdas que compartan un mismo extremo. ¿Será posible que para toda pareja de enteros positivos i y j se tenga que la cuerda A_iB_i y la cuerda A_jB_j se intersecten?

3. (10 puntos) Un tablero consiste de n filas y 10 columnas. Cada cuadrado de este tablero tiene un dígito (un entero de 0 a 9). Sucede que para cada fila A y para cada par de columnas B y C existe una fila que difiere de A exactamente en las columnas B y C. Muestra que $n \geq 512$.

4. (10 puntos) Una sucesión está construida como sigue. Se toma un valor a_0 en el intervalo $[0, 1]$. Para $n \geq 1$ se define $a_{n+1} = 8a_n^4 - 8a_n^2 + 1$. Muestra que existe una infinidad de valores de a_0 para los cuales la sucesión $\{a_n\}$ converge.

5. (10 puntos) Sean A, B y C matrices de 2×2 con entradas reales. Supongamos que $AB = BA$, $AC = CA$ pero $BC \neq CB$. Muestra que A es de la forma λI con I la matriz identidad y λ un real.

6. (10 puntos) Para un entero positivo n definimos $S_n = 1! + 2! + \ldots + n!$. Muestra que existe un entero positivo n tal que S_n tiene un divisor primo mayor a 10^{2014}.

Soluciones

1. El polinomio $2\alpha^2+3\alpha+1$ se factoriza como $(\alpha+1)(2\alpha+1)$. El polinomio $6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1$ se factoriza como $(\alpha+1)(2\alpha+1)(3\alpha+1)$. Si $(\alpha+1)(2\alpha+1)=0$, entonces $\alpha=-1$ o $\alpha=-\frac{1}{2}$, y entonces es racional. De otra forma, tenemos que

$$3\alpha+1=\frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)(3\alpha+1)}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}$$

es cociente de racionales y por tanto es racional. De esta forma, 3α es racional y por tanto α lo es. $\square$

2. Mostraremos que no es posible que cualquier par de cuerdas se intersecten. Consideremos los segmentos A_1B_1 y A_2B_2. Si no se intersectan, entonces ya encontramos dos segmentos que no cumplen. En otro caso, se intersectan y definen cuatro cuerdas A_1A_2, A_1B_2, B_1A_2 y B_1B_2. Sea ϵ la longitud de la cuerda más corta entre éstas. De esta forma, cualquier cuerda de la circunferencia que tenga longitud menor a ϵ no puede intersectar tanto a A_1B_1 como a A_2B_2.

   Por otro lado, como la serie de longitudes converge, tenemos que $\lim_{n\to\infty} x_n=0$, y por tanto existe un entero N tal que $x_N<\epsilon$. De esta forma, es imposible que A_NB_N intersecte tanto a A_1B_1 como a A_2B_2. $\square$

3. Vamos a llamar a la primer fila F_0. Consideremos un subconjunto de $\{1,2,\ldots,10\}$ que tenga una cantidad par de elementos, digamos $c_1<c_2<\ldots<c_{2m}$. Vamos a dar un procedimiento para asociar una fila especial a este subconjunto.

   Primero consideremos la fila F_1 que difiere de F_0 exactamente en las columnas c_1 y c_2. Luego consideremos la fila F_2 que difiere de F_1 exactamente en c_3 y c_4. Seguimos así sucesivamente hasta encontrar la fila F_m que difiere de F_{m-1} exactamente en c_{2m-1} y c_{2m}. Esta fila F_m es la que le asociaremos al subconjunto. Notemos que F_m difiere de F_0 exactamente en las columnas c_1, c_2, $\ldots$, c_{2m}, de modo que distintos subconjuntos nos dan distintas filas.

   Para terminar, notemos que hay $\binom{10}{0}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}=\frac{2^{10}}{2}=512$ subconjuntos de $\{1,2,\ldots,10\}$ que tengan una cantidad par de elementos y por tanto al menos hay esa cantidad de filas. $\square$

4. Vamos a utilizar la siguiente fórmula, la cual se obtiene de la fórmula de De Moivre, de considerar las partes reales y de reemplazar todos los $\sin^2\alpha$ por $1-\cos^2\alpha$ (o bien aplicando dos veces la fórmula para el doble coseno):

$$\cos(4\alpha)=8\cos^4(\alpha)-8\cos^2(\alpha)+1.$$

   Como en el problema tenemos a_0 en $[0,1]$, entonces existe α tal que $a_0=\cos(\alpha)$. Notemos que por la fórmula enunciada, $a_1=\cos(4\alpha)$, e inductivamente se puede probar $a_n=\cos(4^n\alpha)$. Para finalizar el problema basta encontrar una infinidad de valores de α que hagan que la sucesión converja. Pero, por ejemplo, tomando $\alpha=\frac{\pi}{4^j}$ para cualquier entero j tenemos que $4^n\alpha$ es un múltiplo par de π para $n\geq j+1$ y por tanto a partir de a_{j+1} la sucesión es constantemente 1 y por tanto converge. $\square$

5. Denotamos por $\mathcal{M}$ espacio vectorial de las matrices de 2×2 con entradas reales.

   Lema Si $A \in \mathcal{M}$ es una matriz tal que $AX = XA$ para toda $X \in \mathcal{M}$, entonces A es un múltiplo real de la identidad.

   Demostración Supongamos que
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   . Aplicando la hipótesis a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y comparando entrada a entrada obtenemos que $a = d$ y que $c = 0$. Aplicando la hipótesis a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos $b = 0$. Entonces $A = aI$. $\square$

   Vamos a probar el siguiente enunciado, el cual es equivalente al problema: si $AB = BA$, $AC = CA$ y A no es un múltiplo de la identidad, entonces $BC = CB$. Consideremos la función $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dada por $f(X) = AX - XA$. Esta es una función lineal y $\ker f$ son precisamente aquellas matrices que conmutan con A. Como A no es un múltiplo de la identidad, el lema nos dice que $\dim(\ker f) \neq 4$. Sabemos que $I, A, B, C \in \ker f$ y como $\dim(\ker f) \leq 3$, estas matrices son linealmente dependientes, así que existen reales w, x, y, z no todos cero tales que
$$wI + xA + yB + zC = 0.$$
   Si $y = z = 0$, entonces $wI + xA = 0$. Dentro de este caso, si $x \neq 0$, entonces ya pusimos a A como múltiplo de la identidad (contradiciendo que no lo es). Por otro lado, si $x = 0$, entonces $w = 0$, pero esto contradice que no todos w, x, y, z son 0.

   De esta forma, $y \neq 0$ o $z \neq 0$. Analizaremos $y \neq 0$ pues el otro caso es análogo. Con esta hipótesis, podemos escribir $B = -\frac{wI+xA+zC}{y}$. Pero como I, A y C conmutan con C, tendríamos que B conmutaría con C, como queríamos. $\square$

6. Vamos a suponer que no existe un entero n como el que pide el problema. Para encontrar una contradicción definiremos algunos términos.

   Para un primo p y un entero positivo n denotamos por $\nu_p(n)$ como el exponente de p en la factorización en primos de n. Diremos que un primo $p < 10^{2014}$ es *abundante* si la sucesión $\{\nu_p(S_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada. Como estamos suponiendo que ningún S_n tiene un factor primo más grande que 10^{2014} y $S_n \to \infty$, entonces existe al menos un primo grande.

   Ahora vamos a entender cómo están relacionados $\nu_p(S_{n+1})$ y $\nu_p(S_n)$.

   Lema Para cualquier primo p y entero positivo n se cumple lo siguiente:
$$\nu_p(S_{n+1}) = \begin{cases} \nu_p(S_n) & \text{si } \nu_p(S_n) < \nu_p((n+1)!), \\ \nu_p((n+1)!) & \text{si } \nu_p(S_n) > \nu_p((n+1)!), \\ \text{Algo} \geq \nu_p(S_n) & \text{si } \nu_p(S_n) = \nu_p((n+1)!). \end{cases}$$
   La demostración del lema se hace observando que $S_{n+1} = S_n + (n+1)!$ y factorizando la máxima potencia de p posible en cada sumando. Con la ayuda de este lema podemos

entender algunas desigualdades para primos abundantes. Específicamente, con la ayuda del lema podemos mostrar que si p es un primo abundante, entonces $\nu_p(S_n) \geq \nu_p((n+1)!)$. En efecto, si para alguna n se cumpliera lo contrario, entonces caeríamos en el primer caso del lema, de donde $\nu_p(S_{n+1}) = \nu_p(S_n)$, y además $\nu_p(S_{n+1}) = \nu_p(S_n) < \nu_p((n+1)!) \leq \nu_p((n+2)!)$. De esta forma, caeríamos de nuevo en el primer caso y entonces podríamos mostrar inductivamente $\nu_p(S_n) = \nu_p(S_{n+1}) = \nu_p(S_{n+2}) = \ldots$, contradiciendo que p es un primo abundante.

Vamos a mostrar una cosa más: que si p es un primo abundante que divide a $n+2$, entonces $\nu_p(S_n) = \nu_p((n+1)!)$. De nuevo usamos el lema. Si no sucediera esto, estaríamos en el segundo caso, y por tanto pasamos de $\nu_p(S_n)$ a $\nu_p(S_{n+1}) = \nu_p((n+1)!)$. Pero como p divide a $n+2$, tendríamos que $\nu_p((n+2)!) > \nu_p((n+1)!) = \nu_p(S_{n+1})$, contradiciendo lo que probamos en el párrafo anterior. Como p divide a $n+2$ entonces no divide a $n+1$ y concluimos que $\nu_p(S_n) = \nu_p((n+1)!) = \nu_p(n!)$.

Ya tenemos todas las herramientas para construir una contradicción. Los primos menores a 10^{2014} que no son abundantes tienen sus exponentes acotados para los S_n. Sea M el máximo de todos estos exponentes. Tomemos N de modo que:

- $N+2$ sea múltiplo de todos los primos abundantes y
- N sea suficientemente grande como para que $\nu_p(N!) > M$ para todo primo que no sea abundante.

La primera condición nos garantiza que $\nu_p(S_N) = \nu_p(N!)$ para todo primo abundante p y la segunda nos garantiza que $\nu_p(S_N) < \nu_p(N!)$ para todo primo no abundante p. Entonces como primo a primo gana el exponente de $N!$, tendríamos que $N! \geq S_N = 1! + \ldots + N! > N!$ y por tanto tenemos una contradicción. $\square$

Nota: En el problema nunca usamos 10^{2014} de manera especial, así que se puede probar un resultado similar para probar que existen primos arbitrariamente grandes que dividen a algún S_n. En particular, esto es una demostación alternativa de que existe una infinidad de primos.