# 3er Concurso Unversitario de Matemáticas Galois-Noether 2013
# Segunda Etapa

Sábado 17 de agosto 2013

Bienvenido a la Segunda Etapa del Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether.

- **Responde a las preguntas justificando cada uno de tus pasos. Cada problema se califica sobre 10 puntos y se darán puntos parciales por avances hacia la solución de un problema.**
- **Tienes 4 horas y media para resolver el examen.**
- **Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.**

1. (10 puntos) Determina si existen enteros positivos $x$ y $y$ tales que $\lfloor e^x \rfloor$ y $\lfloor e^y \rfloor$ son primos gemelos.

   **Nota:** Dos primos son gemelos si están a distancia 2. Aquí $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual a $x$.

2. (10 puntos) El cuadrado $ABCD$ tiene lado 1. Los puntos $L$ y $M$ son los puntos medios de $AB$ y $BC$ respectivamente. La recta $AM$ corta a $DL$ y a $CL$ en $E$ y $F$ respectivamente. La recta $DM$ corta a $LC$ en $G$. Determina el área del cuadrilátero $DEFG$.

3. (10 puntos) Considera el conjunto $S$ de números enteros que usan exactamente 6 dígitos distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Muestra que **menos** de $\frac{5}{14}$ de los elementos de $S$ son números primos.

4. (10 puntos) Tomamos dos reales $a$ y $b$ ($a < b$) en la imagen de una función contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Muestra que el intervalo cerrado $[a, b]$ es la imagen bajo $f$ de algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$

5. (10 puntos) Tomamos un grupo finito $G$. Una función $f : G \times G \to G$ es *monomial* si existe un entero $k \geq 0$ tal que:

$$f(x,y) = \prod_{j=1}^{k} z_j$$

en donde cada $z_i$ es $x$ o $y$. Por ejemplo, $f(x,y) = xyyxx$, $f(x,y) = xy$ y $f(x,y) = yxxx$ son funciones monomiales.

Tomemos $p$ un número primo y $G$ un grupo. Muestra que si $G$ tiene exactamente $p^2$ funciones monomiales, entonces $G$ es abeliano.

6. (10 puntos) Sean $a, b, c > 0$ reales tales que $3b \leq c \leq a + b$. Muestra que para cualquier $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se tiene que:

$$\frac{c \sin x}{a + b \cos x} < x$$

**Soluciones**

1. Mostraremos que no existen tales enteros. Para eso veremos que para cualquier par de enteros positivos $x < y$ tenemos que $\lfloor e^y \rfloor - \lfloor e^x \rfloor > 2$. Con esto será imposible que los números queden a distancia 2.

   Denotemos por $\{x\}$ a la parte fraccionaria de $x$, es decir, a $x - \lfloor x \rfloor$. Siempre tenemos $0 \leq \{x\} < 1$. Comenzamos observando las siguientes desigualdades:

   $$\lfloor e^y \rfloor - \lfloor e^x \rfloor = e^y - e^x - \{e^y\} + \{e^x\} \geq e^{x+1} - e^x - \{e^y\} + \{e^x\} \geq e^{x+1} - e^x - 1$$

   Ahora, notemos que $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots > \frac{5}{2} > 2$. De esta forma,

   $$e^{x+1} - e^x - 1 = e^x(e-1) - 1 \geq e(e-1) - 1 > 2\left(\frac{5}{2} - 1\right) - 1 = 2$$

   Así, juntando ambas cadenas de desigualdades tenemos $\lfloor e^y \rfloor - \lfloor e^x \rfloor \geq e^{x+1} - e^x - 1 > 2$, como queríamos probar. $\square$

2. Daremos una solución usando geometría analítica. Hay otras soluciones euclideanas. Tomemos los puntos del cuadrado así:

   $$A = (0, 1) \quad B = (1, 1) \quad C = (1, 0) \quad D = (0, 0)$$

   Al trazar el segmento $DF$ vemos que el cuadrilátero que nos interesa queda partido en dos triángulos iguales. Basta encontrar el área de $DEF$ y multiplicar por 2. La ecuación de la recta $DL$ es $y = 2x$. La ecuación de la recta $AM$ es $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Como el producto de las pendientes de estas rectas es $-1$, entonces las rectas son perpendiculares. De esta forma, el triángulo $DEF$ es rectángulo y por tanto el área total que nos interesa es $2\left(\frac{EF \cdot DE}{2}\right) = EF \cdot DE$.

   El punto $E$ es la intersección de las rectas $y = 2x$ y $y = -\frac{1}{2}x + 1$, así que es el punto $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$. De esta forma, $DE = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{5}}$.

   El punto $F$ es la intersección de las rectas $y = x$ y $y = -\frac{1}{2}x + 1$, así que es el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. De esta forma, $EF = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{45}}$.

   Con esto concluimos que el área que nos interesa es $DE \cdot EF = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{45}} = \frac{4}{15}$. $\square$

3. En total tenemos 7! números en $S$. Usando criterios de divisibilidad encontraremos varios números que no son primos.

   - Si un número termina en 2, 4, 5 ó 6, entonces no es primo por ser par o múltiplo de 5. Eligiendo uno de estos 4 números para terminar y completando de las 6! formas posibles vemos que en este caso encontramos $4 \cdot 6!$ números de $S$ que no son primos.

- Si un número de $S$ tiene suma divisible entre 3, entonces es múltiplo de 3. Observemos que $1+2+3+4+5+6+7=28$, de modo que para obtener suma de dígitos divisible entre 3 hay que quitar al 1, al 4 o al 7. Ahora, debemos tener cuidado de no quitar números que ya quitamos en el caso anterior:
  - Si el número no usa al 1, entonces puede terminar en 3 ó 7. Después de esto hay 5! formas de completarlo. Esto nos da $2 \cdot 5!$.
  - Si el número no usa al 7, entonces puede terminar en 1 ó 3. Después de esto hay 5! formas de completarlo. Esto nos da $2 \cdot 5!$.
  - Si el número no usa al 4, entonces puede terminar en 1, 3 ó 7. Después de esto hay 5! formas de completarlo. Esto nos da $3 \cdot 5!$.

  De esta forma, en este caso tenemos $7 \cdot 5!$ números adicionales de $S$ que no son primos.

Veamos que estos estimados son suficientes. La cantidad de primos de $S$ es a lo más $7! - 4 \cdot 6! - 7 \cdot 5! = 7! - 5 \cdot 6! - 5! = 2 \cdot 6! - 5!$. Así, la proporción de primos es a lo más:

$$\frac{2 \cdot 6! - 5!}{7!} = \frac{2 \cdot 6 - 1}{7 \cdot 6} = \frac{11}{42} < \frac{5}{14}$$

□

4. Como $a$ y $b$ están en la imagen, existen $c$ y $d$ tales que $f(c) = a$ y $f(d) = b$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c < d$, pues en otro caso podemos resolver el problema para $f(-x)$.

   Notemos que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x > c \text{ y } f(x) = b\}$ no es vacío pues tiene a $d$ y por definición está acotado inferiormente. De este modo tiene un ínfimo al cual llamaremos $\beta$. Por continuidad, tenemos que $f(\beta) = b$ y en particular, $\beta > c$.

   Ahora notemos que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x < \beta \text{ y } f(x) = a\}$ tampoco es vacío pues tiene a $c$ y por definición está acotado superiormente. Por lo tanto, tiene un supremo que llamaremos $\alpha$. Por continuidad tenemos que $f(\alpha) = a$.

   Afirmamos que la imagen del intervalo $[\alpha, \beta]$ es $[a, b]$. Por un lado, tenemos que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$, de modo que por el teorema del valor intermedio todo el intervalo $[a, b]$ está contenido en la imagen. Veamos que no hay ningún otro punto. Supongamos existe un valor de $x \in [\alpha, \beta]$ para el cual $f(x) = y > b$. Entonces de nuevo por el teorema de valor intermedio hay un punto $\gamma \in [\alpha, x]$ tal que $f(\gamma) = b$, contradiciendo la minimalidad de $\beta$. De manera análoga se prueba que no hay un punto $x \in [\alpha, \beta]$ con $f(x) = y < a$.

   Con esto concluimos que la imagen del intervalo $[\alpha, \beta]$ es $[a, b]$. □

5. Recordemos que cada elemento $x$ en un grupo tiene un orden $\mathrm{ord}_x$, que es el menor entero positivo $k$ para el cual $x^k = e$. Tomemos $N$ el mínimo común múltiplo de todos los órdenes de los elementos de $G$. Para cada $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ definamos la función $f_{i,j}(x, y) = x^i y^j$. Todas estas son funciones monomiales. Afirmamos que todas estas son distintas.

   Supongamos que existen índices $i$, $j$, $k$, $l$ tales que $f_{i,j} = f_{k,l}$. Tomemos $x \in G$. Tenemos entonces que:

$$x^i = f_{i,j}(x,e) = f_{k,l}(x,e) = x^k$$

Sin pérdida de generalidad, $k \geq i$. La igualdad anterior nos dice que $x^{k-i} = e$ y por tanto $\mathrm{ord}_x | k-i$. Como la elección de $x$ fue arbitraria, esto nos dice que $k-i$ es múltiplo de todos los órdenes y por tanto es múltiplo de $N$. Pero $0 \leq k-i \leq N-1$, y por tanto $k-i=0$ y así $k=i$. De manera análoga se prueba que $j=l$, y por tanto que todas las funciones propuestas son distintas. Observemos que son $N^2$ y por tanto $N^2 \leq p^2$.

Ahora diremos que $f$ y $g$ están relacionadas si existe un $a \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ tal que $f(x,y)g^{-1}(x,y) = x^a$. Notemos que esto es una relación de equivalencia, y que cada clase de equivalencia tiene exactamente $N$ elementos. Esto muestra que $N$ divide a $p^2$, pero como $1 < N^2 \leq p^2$, entonces $N = p$. De este modo, las funciones monomiales construidas previamente ya son $p^2$.

Terminemos con el problema. Tomemos la función monomial $f(x,y) = yx$. Esta debe ser igual a alguna de las que ya construimos. Si tuvieramos $x^i y^j = yx$, evaluando con $y = e$ obtenemos $i = 1$ como antes. De manera similar, evaluando con $x = e$ obtenemos $j = 1$. De esta forma, concluimos que $xy = yx$ para cualquier par de elementos $x, y$ en $G$. $\square$

6. Vamos a considerar la función $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x(a + b\cos x) - c\sin x.$$

Lo que queremos mostrar es equivalente a mostrar $f(x) > 0$. Notemos que $f(0) = 0$ y que

$$f'(x) = a + b\cos x - bx\sin x - c\cos x, \quad f'(0) = a + b - c \geq 0.$$

Derivando una vez más, tenemos que

$$f''(x) = (\sin x)(c - 2b) - bx\cos x = (\cos x)[(c-2b)\tan x - bx].$$

Ahora tomemos $g(x) = (c-2b)\tan x - bx$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Notemos que $g'(x) = \frac{(c-2b) - b\cos^2 x}{\cos^2 x}$. Como tenemos que $(c-2b) - b\cos^2 x \geq (c-2b) - b = c - 3b \geq 0$, la función $g$ es creciente.

Esto implica que $g(x) > g(0) = 0$ para $x > 0$. Esto a su vez nos dice que $f''(x) > 0$, de modo que $f'(x) > f'(0) \geq 0$ para $x > 0$. Aplicando esta idea una vez más, tenemos que $f(x) > f(0) = 0$ como queríamos. $\square$