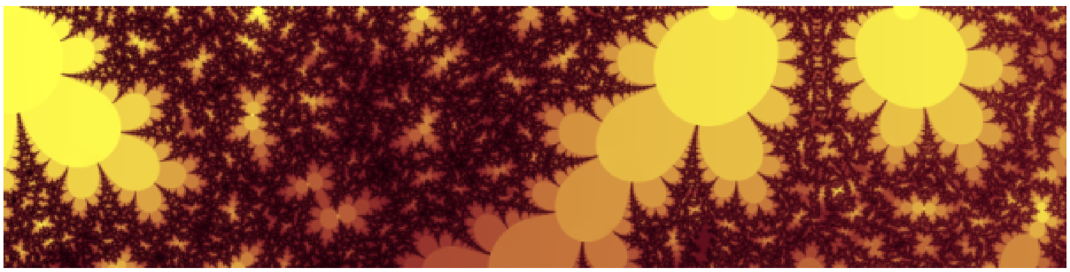
V Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2015
Primera Etapa, Soluciones



Clave de respuestas

- 1 al 5: D C B B D
- 6 al 10: A A B B D
- 11 al 15: C B A C D
- 16 al 20: B A D A A
- 21 al 25: D C C A C

Soluciones

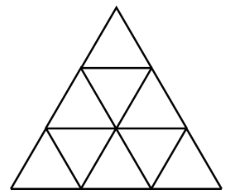
1. Se tienen tres enteros positivos $a > b > c > 10$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es la más grande?

   Solución: La respuesta es D.

   Mostraremos que para x y y enteros positivos mayores o iguales a 2 se tiene que $2^{x+y} > 2^x + 2^y$. Sin pérdida de generalidad se tiene $x \geq y$. De este modo,

   $$2^x + 2^y \leq 2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1} < 2^{x+y}.$$

   Regresando al problema, tenemos entonces que $2^{a+b+c} > 2^{a+b} + 2^c > 2^a + 2^b + 2^c$. También se tiene que $2^{a+b+c} > 2^a + 2^{b+c}$. Esto muestra que 2^{a+b+c} es el mayor.



2. El siguiente triángulo está hecho por pequeños triángulos equiláteros de lado 1. Se van a pintar de azul algunos segmentos de longitud 1. ¿Cuál es la máxima cantidad de segmentos que se pueden pintar de modo que ningún triangulo pequeño tenga sus tres lados azules?

   Solución: La respuesta es C.

   Notemos que hay seis triángulos pequeños que apuntan hacia arriba. De esos, máximo se puede pintar dos lados de cada uno, así que por mucho podemos pintar 12 lados. Y si de estos triángulos pintamos sus lados laterales (los que no son la base), entonces no se forma ningún pequeño con todos sus lados azules pues no pintamos ningún lado horizontal y todos los triángulos tienen lados horizontales. Esto muestra que se puede pintar con 12.

3. El número $371,313$ tiene 6 divisores. Encuentra su factorización en primos.

   Solución: La respuesta es B.

   Como la suma de dígitos es 18, entonces es divisible entre 9 y queda $3^2 \cdot 41527$. Se puede mostrar con cuentan que 41527 es primo, pero también se puede usar la hipótesis adicional del problema. Como el número tiene 6 divisores, debe de ser de la forma $p^2 \cdot q$ o bien p^5 con p y q primos. Sin embargo 41527 tiene suma de dígitos 19, así que ya no es divisible entre 3. Esto muestra que el número es de la forma p^2q. Ya sabemos que $p = 3$ y por lo tanto $q = 41527$ debe ser primo.

4. Los números reales a, b y c satisfacen que $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Determina el valor de $a + b + c$.

   Solución: La respuesta es B.

   Notemos primero que $a^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$, así que $a \leq 1$. A partir de esta desigualdad se deduce que $a^2(1 - a) \geq 0$. Similarmente, $b^2(1 - b) \geq 0$ y $c^2(1 - c) \geq 0$. Así, tenemos que:

$$0 \leq a^2(1-a) + b^2(1-b) + c^2(1-c) = a^2 - a^3 + b^2 - b^3 + c^2 - c^3 = 1 - 1 = 0.$$

   De esta forma, se tiene que cumplir la igualdad en la primera desigualdad. Esto muestra que cada sumando es cero y por tanto cada uno de a, b y c son cero o uno. Como $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, exactamente uno de ellos es uno y esto muestra que $a + b + c = 1$.

   Nota: Como es un examen de opción múltiple, el problema también se puede resolver con un caso particular. Por ejemplo, tomando $a = b = 0$, $c = 1$ se cumplen las hipótesis y la suma es 1, así que esa debe ser la respuesta.

5. Encuentra los valores de x que hacen que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sea cero.

   Solución: La respuesta es D.

El determinante de esta matriz es $8+x+x-2x^2-2-2=-2x^2+2x+4=-2(x^2-x-2)=-2(x-2)(x+1)$. Se anula cuando $x=2$ o cuando $x=-1$.

Nota: Viendo las respuestas también se puede resolver el problema. Notemos que con $x=2$ el primer renglón y el último son iguales, así que la matriz tiene determinante cero. Notemos que con $x=-1$ el renglón de enmedio es la suma de los otros dos, así que los renglones no son linealmente independientes y por tanto el determinante es cero.

6. ¿Para cuántos enteros positivos n se satisface que n^2-9 divide a $20n-60$?

   Solución: La respuesta es A.

   Como $n^2-9=(n+3)(n-3)$ y $20n-60=20(n-3)$, entonces la divisibilidad se da si y sólo si $n+3$ divide a 20. Como n es un entero positivo, $n+3\geq 4$. Los divisores de 20 que son mayores o iguales a 4 son $4, 5, 10, 20$. De esta forma, hay 4 posibilidades.

7. Se toma un número n. La suma de los números pares $2+4+\ldots+2n$ es A. La suma de los números impares $1+3+\ldots+(2n-1)$ es B. Si $A-B$ es 100, ¿cuál es el valor de n?

   Solución: La respuesta es A.

   Notemos que tanto A como B tienen n sumandos, así que:

$$A-B=(2-1)+(4-3)+\ldots+(2n-(2n-1))=1+1+\ldots+1=n.$$

   Aternativamente, se puede calcular explícitamente cada suma:

$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$$
$$2+4+\ldots+2n=2(1+2+\ldots+n)=n(n-1).$$

   De esta forma, $A-B=n$ también. De cualquier forma, tenemos que $n=A-B=100$.

8. Sea ABC un triángulo con los tres lados distintos. ¿Cuántos triángulos existen que sean congruentes a ABC y que compartan exactamente dos vértices con ABC?

   Solución: La respuesta es B.

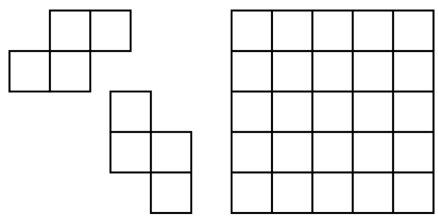
   Hay 3 formas de escoger la pareja de vértices que se compartirán. Veamos qué sucede si la pareja a compartir es AB. Entonces el tercer vértice del nuevo tríangulo tiene tres opciones:

   - Quedar del lado opuesto que C con respecto a AB y hacer un triángulo con la misma orientación que ABC.
   - Quedar del lado opuesto que C con respecto a AB y hacer un triángulo con distinta orientación que ABC.
   - Quedar del mismo lado que C con respecto a AB y hacer un triángulo con distinta orientación que ABC.

Así, cada pareja tiene tres posibilidades y por lo tanto en total hay 9 triángulos.

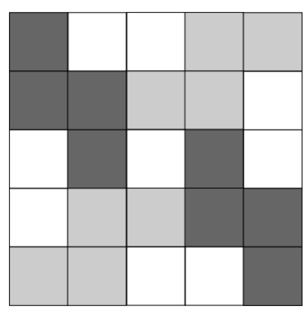
Nota: Es imposible que el tercer vértice quede del mismo lado que C con respecto a AB y haga un triángulo con la misma orientación pues coincidiría con ABC y entonces compartirían tres vértices. La hipótesis de ser escaleno justifica que los casos enunciados no se repiten.

9. En un tablero se 5×5 colocan fichas Z o sus rotaciones. Se permite que las fichas de traslapen, pero no que se salgan del tablero. ¿Cuál es el mínimo número de piezas que se deben poner para que las fichas cubran todo el tablero?

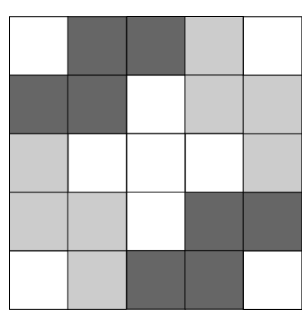


Solución: La respuesta es B.

La única forma de cubrir las esquinas es como indica el siguiente dibujo:



De las casillas que no han sido cubiertas, es imposible cubrir tres de ellas una ficha. Como quedan 9 casillas por cubrir, se necesitan al menos otras 5 fichas. Así, en total se necesitan al menos 9 fichas. Ahora, si traslapamos el dibujo anterior con el siguiente ya sólo faltaría cubrir la casilla central. Esa se cubre con una ficha más. Esto da un acomodo que usa 9 fichas y por tanto muestra que 9 es el valor óptimo.



10. Se toman algunos números x, y, z en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ¿Para cuántas ternas ordenadas (x, y, z) se cumple que 7 divide a $x^2 + y^2 - z^2$? **Nota:** Son ternas ordenadas así que por ejemplo $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$ cuentan como ternas diferentes.

Solución: La respuesta es D.

Trabajaremos módulo 7. Las soluciones están en biyección con las soluciones módulo 7. Queremos que se de la igualdad $x^2+y^2-z^2=0$. Esto es equivalente a pedir que $y^2=z^2-x^2$, o bien que

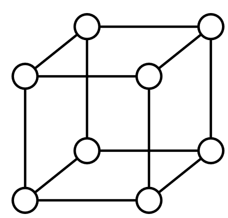
$$y^2=(z+x)(z-x).$$

Dividimos en dos casos.

- Si $z+x=0$, entonces $y=0$ y $z-x$ puede tomar cualquier valor. Basta definir el valor de z para que el valor de x quede definido, pues en este caso $x=-z$. De esta forma, estos casos quedan totalmente determinados por el valor de z y por lo tanto hay 7 posibildades.
- Si $z+x\neq 0$, entonces tiene inverso módulo 7. Al fijar un valor de $z+x$ notamos que $z-x=(z+x)^{-1}y^2$. Si además fijamos un valor de y, entonces $z-x$ queda determinado. Sabiendo $z+x$ y $z-x$ podemos obtener el valor de z y de x (por ejemplo, $z=2^{-1}((z+x)+(z-x))$). De este modo, en este caso todo queda determinado con elegir uno de los 6 posibles valores de $z+x$ y uno de los 7 valores posibles de y. Esto muestra que este caso tiene 42 posibilidades.

De esta forma, hay $6+42=49$ posibilidades.

11. El conjunto V de $\mathbb{R}^3$ consiste de los 8 vectores de la forma (x,y,z) donde x, y y z pueden valer 0 o 1. La *dirección* entre dos vectores distintos u y v es la resta $u-v$. ¿Cuántas direcciones distintas determinan los vectores de V? **Nota:** Observa que $u-v$ y $v-u$ son direcciones diferentes.



Solución: La respuesta es C.

Como las entradas de los vectores están en $\{0,1\}$, las entradas de las direcciones sólo pueden estar en $\{-1,0,1\}$. Cada dirección tiene tres entradas que pueden tomar tres valores posibles, así que hay 27 direcciones que podrían existir. Debemos quitar la opción $(0,0,0)$ pues la definición de dirección sólo contempla vectores distintos.

Para cualquier otra dirección podemos construir dos vectores que la generen. Para esto:

- Si queremos que en una coordenada aparezca -1, ponemos la entrada 0 en u y 1 en v.
- Si queremos que en una coordenada aparezca 0, ponemos la entrada 0 en u y 0 en v.
- Si queremos que en una coordenada aparezca 1, ponemos la entrada 1 en u y 0 en v.

Esto muestra que hay 26 direcciones posibles.

12. Considera los números en base 4 que no tienen dígitos iguales a 0 y que tienen suma de dígitos igual a 6. De estos números, llamamos M al más grande y m al más chico. ¿Cuál es el valor de $M - m$? Da la respuesta en base 10.

    Solución: La respuesta es B.

    En cualquier base fija, si un número tiene más dígitos que otro, entonces es mayor. De esta forma, el más grande base 4 con suma de dígitos 6 es $111111_4 = 1+4+4^2+4^3+4^4+4^5 = 1365$.

    Por otro lado, un número base 4 con suma de dígitos 6 no puede tener solo un dígito. Pero sí puede tener 2. Y en este caso se forza a ser $33_4 = 3(1+4) = 15$.

    De esta forma, $M - m = 1365 - 15 = 1350$.

13. Para G un grupo finito se tienen elementos a y b distintos entre sí y distintos de la identidad. Se sabe que $ba = ab^2$. ¿Cuál de los siguientes no puede ser el orden de b?

    Solución: La respuesta es A.

    El orden de b no puede ser par. Si el orden de b fuera $2k$, entonces tendríamos que $b^{2k} = e$, de modo que:

    $$a = ab^{2k} = bab^{2k-2} = b^2ab^{2k-4} = \ldots = b^k a.$$

    Multiplicando por el inverso de a de ambos lados tendríamos que $e = b^k$, contradiciendo que $2k$ era el orden de b.

14. En una urna se tienen 4 pelotas rojas y 4 pelotas azules. Se sacan 4 pelotas al azar. ¿En cuál de los siguientes intervalos se encuentra la probabilidad de que dos de ellas sean rojas y dos de ellas sean azules?

    Solución: La respuesta es C.

    Hay $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!}4! = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70$ formas de sacar 4 pelotas de las 8.

    Hay $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 6 \cdot 6 = 36$ formas de sacar dos pelotas de cada color.

    De esta forma, la probabilidad de sacar dos pelotas de cada color es $\frac{36}{70} \approx 0.514$, que está en el intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

15. Los números complejos 0, a, b y c son los vértices de un cuadrado (recorridos en ese orden). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones siempre es falsa?

    Solución: La respuesta es D.

    Multiplicar por i rota un número complejo en 90° en dirección positiva, manteniendo la norma.

    - El inciso a) está afirmando que los números complejos a y c son perpendiculares y de la misma medida, lo cual es cierto.
    - El inciso b) afirma que la diagonal de a a c es perpendicular a la diagonal de 0 a b y de la misma medida, lo cual es cierto.
    - El inciso c) afrima que el lado de a a b es perpendicular al lado de c a b y de la misma medida, lo cual también es cierto.

- Finalmente, el inciso d) afirma que el lado de a a b es perpendicular lado de c a 0, lo cual es falso pues son paralelos.

Nota: Como es un examen de opción múltiple, este problema también se puede resolver estudiando el caso particular $a = 1$, $b = 1 + i$, $c = i$. Es fácil verificar que los incisos a), b) y c) son ciertos en esta caso, así que d) debe ser el que siempre es falso.

16. El número real x satisface $x^2 - x - 3 = 0$. Encuentra el valor de $x^8 - 217x - 217$.

    Solución: La respuesta es B.

    Tenemos que $x^2 = x + 3$. Elevando al cuadrado:

    $$x^4 = (x^2)^2 = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 = 7x + 12.$$

    Elevando de nuevo al cuadrado:

    $$x^8 = (x^4)^2 = (7x + 12)^2 = 49x^2 + 168x + 144 = 217x + 291.$$

    De esta forma, $x^8 - 217x - 291 = 0$ y por lo tanto $x^8 - 217x - 217 = 74$.

    Nota: El problema también se puede resolver usando división polinomial larga. Se muestra que $x^8 - 217x - 217$ es un múltiplo de $x^2 - x - 3$, más 74 de resíduo.

17. Sea $x > 1$ un número real. ¿Cuál de las condiciones garantiza que $\int_1^2 x^t\,dt = \int_1^2 t^x\,dt$?

    Solución: La respuesta es A.

    Realizando la primera integral, tenemos:

    $$\int_1^2 x^t\,dt = \left.\frac{x^t}{\ln x}\right|_1^2 = \frac{x^2 - x}{\ln x}.$$

    Realizando la segunda integral,

    $$\int_1^2 t^x\,dt = \left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right|_1^2 = \frac{2^{x+1} - 1}{x + 1}.$$

    La igualdad de evaluaciones es $\frac{x^2-x}{\ln x} = \frac{2^{x+1}-1}{x+1}$, y se puede reacomodar como $\frac{\ln x}{x} = \frac{x^2-1}{2^{x+1}-1}$.

18. Sea G un grupo finito de orden n. Podemos elegir en G elementos de orden p y q, donde $(p, q) = 1$, $p > q > 1$ y $p + q \geq n - 1$. ¿Cuál es el valor de n?

    Solución: La respuesta es D.

    Como $p \geq 3$, entonces G no puede ser el grupo trivial, y así $n \geq 2$. Tenemos que $n \leq p+q+1 \leq 2p$. Como el orden de un elemento divide al orden del grupo, tenemos que p divide a n. Como $3 \leq n \leq 2p$, entonces $n = p$ o $n = 2p$. Como G también tiene un elemento de orden q, tenemos que q divide a n. Si $n = p$, entonces q divide a p, lo cual es imposible pues p y q son primos relativos. De esta forma $n = 2p$. Tenemos que q divide a $2p$, pero $(p, q) = 1$, así que q divide a 2. Como $q \geq 2$, entonces $q = 2$. Regresando a la hipótesis inicial, tenemos que $n \leq p + 2 + 1 = p + 3$. Así, $2p \leq p + 3$, de modo que $p \leq 3$. Esto forza $p = 3$ y $n = 6$.

19. Considera los polinomios

$$p_1(x) = x(x-1) \quad p_2(x) = (x-1)(x-2) \quad p_3(x) = (x-2)(x-3) \quad p_4(x) = (x-3)(x-4).$$

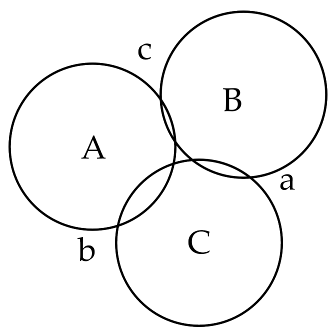
¿Cuál de las siguientes cuaternas (a_1, a_2, a_3, a_4) hace que $a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4 = 0$?

Solución: La respuesta es A.

Notemos que en todas las opciones tenemos $a_1 = 1$. Combinaremos esta información con una evaluación polinomial. Poniendo $x = 2$ se eliminan los dos sumandos intermedios y obtenemos que $2 + 2a_4 = 0$. Esto muestra que $a_4 = -1$ y por lo tanto la única opción posible es A.

Nota: Esta solución se aprovecha de que la única opción posible es A. De cualquier forma, evaluaciones similares (en $x = 1, 3$) permiten verificar que en efecto A es la solución.

20. Tres circunferencias tienen el mismo radio. Ningún punto del plano está en el interior de las tres, pero se intersectan de dos en dos como en el dibujo. Las intersecciones de dos en dos tienen áreas a, b, c como se indica. Las áreas que quedan al quitar las intersecciones son A, B y C como se indica. Si $A > B > C$, ¿qué podemos decir de a, b y c?



Solución: La respuesta es A.

Mostraremos que $a > b$. Como las tres circunferencias son de radio 1, entonces tienen la misma área. Así, $A + b + c = a + B + c$. De esta forma, $a - b = A - B > 0$, de modo que $a > b$. De manera análoga se muestra que $b > c$.

21. Determina el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{2x\sin x - 2x^2}$.

Solución: La respuesta es D.

Usando series de Taylor, en el numerador tenemos

$$2 - 2\cos x - x^2 = 2x^4 \left(\frac{1}{4!} + o(x)\right),$$

y en el denominador tenemos

$$2x \sin x - 2x^2 = 2x^4 \left(\frac{1}{3!} + o(x)\right).$$

De esta forma,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{2x\sin x - 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4(\frac{1}{4!}+o(x))}{2x^4(\frac{1}{3!}+o(x))} = \frac{1}{4}.$$

Nota: $o(x)$ son errores que se van a cero conforme x tiende a cero. El problema también se puede resolver aplicando 3 veces la regla de L'Hôpital.

22. La matriz A es de $n\times n$ para n un entero positivo impar. Si se cumple que $A\cdot A^\top = I$, ¿cuánto vale $\det(A^2-I)$? **Nota:** I es la matriz identidad de $n\times n$.

    Solución: La respuesta es C.

    Como la matriz es ortogonal, todos sus eigenvalores tienen norma 1. Como n es impar, entonces el polinomio característico de A tiene grado impar y por lo tanto tiene al menos una solución real. Esto muestra que 1 o -1 es un valor propio, así que alguno de los determinantes $\det(A-I)$ o $\det(A+I)$ es cero. De esta forma,

    $$\det(A^2-I) = \det((A+I)(A-I)) = \det(A-I)\det(A+I) = 0.$$

    Nota: Ya que es un problema de opción múltiple, el problema también se puede resolver con un caso particular, por ejemplo, con $A=I$.

23. Se tiene el conjunto de 3 elementos $X=\{1,2,3\}$. Queremos escoger una familia U de subconjuntos de X de modo que 1) $\emptyset$ está en U, 2) X está en U y 3) si A y B están en U, entonces $A\cup B$ y $A\cap B$ también están en U. ¿De cuántas formas podemos elegir a U?

    Solución: La respuesta es C.

    Sea a la cantidad de subconjuntos de X de un elemento que se usan y b la cantidad de subconjuntos de dos elementos de X que se usan. Contaremos según los siguientes casos. No mencionaremos a $\emptyset$ ni a X pues siempre están.

    - $a=b=0$. Sólo **una** posibilidad.
    - $a=1$, $b=0$. **Tres** posibilidades.
    - $a=0$, $b=1$. **Tres** posibilidades.
    - $a=2$, $b=0$. Imposible, pues si $\{x\}$ y $\{y\}$ están, su unión $\{x,y\}$ también.
    - $a=1$, $b=1$. Hay del estilo $\{\{x\},\{x,y\}\}$ (**seis** posibilidades) y del estilo $\{\{x\},\{y,z\}\}$ (**tres** posibilidades).
    - $a=0$, $b=2$. Imposible, pues la intersección de los dos de dos elementos debe estar.
    - $a=3$, entonces se forza $b=3$. Hay **una** posibilidad.
    - $a=2$, $b=1$. Es de la forma $\{\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$. Hay **tres** posibilidades.
    - $a=1$, $b=2$. Es de la forma $\{\{x,y\},\{y,z\},\{y\}\}$. Hay **tres** posibilidades.
    - $a=2$, $b=2$. Si $\{x\}$ y $\{y\}$ son los de un elemento, entonces $\{x,y\}$ debe estar. Se puede completar con $\{y,z\}$ o con $\{x,z\}$. Hay **seis** posibilidades.

Así, en total hay $1+3+3+6+3+1+3+3+6=29$ posibilidades.

Nota: El problema está pidiendo contar las topologías de un conjunto (contando las isomorfas tantas veces como se repiten). En general, este es un problema difícil de combinatoria para el cual no se conocen formas eficientes de contar. Un resultado de Kleitman y Rothschild muestra que el número de topologías no isomorfas es asintótico a $2^{n^2/4}$.

24. Considera la función $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$. Determina el valor de $f(1)+f(2)+\ldots+f(12)$.

    Solución: La respuesta es A.

    Multiplicando por el conjugado del denominador, notemos que:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left((2n+1)\sqrt{2n+1}-(2n-1)\sqrt{(2n-1)}\right).
\end{aligned}
$$

    De esta forma, la suma es telescópica y tenemos que el resultado es

$$
\frac{1}{2}(25 \cdot 5 - 1 \cdot 1) = \frac{124}{2} = 62.
$$

25. Después de resolver el problema de Cheryl, a Évariste le dio curiosidad de saber la fecha de cumpleaños de Emmy. Como Emmy es famosa, la buscó en Wikipedia. Se dió cuenta que nació el día x del mes número y. Le dio mucho gusto ver que x y y eran números primos que terminaban en el mismo dígito. Tú sabes sólo esta información. Si quisieras determinar el valor de x y de y, ¿cuál de las siguientes informaciones te permite determinarlo?

    Solución: La respuesta es C.

    Sabiendo la información que dijo Galois, las posibles fechas de cumpleaños son 2/2, 3/3, 13/3, 23/3 5/5, 7/7, 17/7, 11/11.

    - Si supiéramos el valor de y, podríamos tener la mala suerte de que $y=3$. En este caso no podríamos saber si es el 3/3, el 13/3 o el 23/3. Esta información no es suficiente para siempre determinar el cumpleaños.
    - Si supiéramos el valor de $x-y$, podríamos tener la mala suerte de que $x-y=0$. En este caso no podríamos saber si es el 2/2, el 3/3, el 5/5, el 7/7 o el 11/11. Esta información no es suficiente para siempre determinar el cumpleaños.
    - Todas las fechas posibles tienen distinta suma (respectivamente $4, 6, 16, 26, 10, 14, 22$). Si supieramos $x+y$ definitivamente podríamos conocer la fecha de cumpleaños.

    Nota: Emmy Noether nació el 23 de marzo de 1882. Évariste Galois nació el 25 de octubre de 1811.